EL APARATO DEMOSTRATIVO

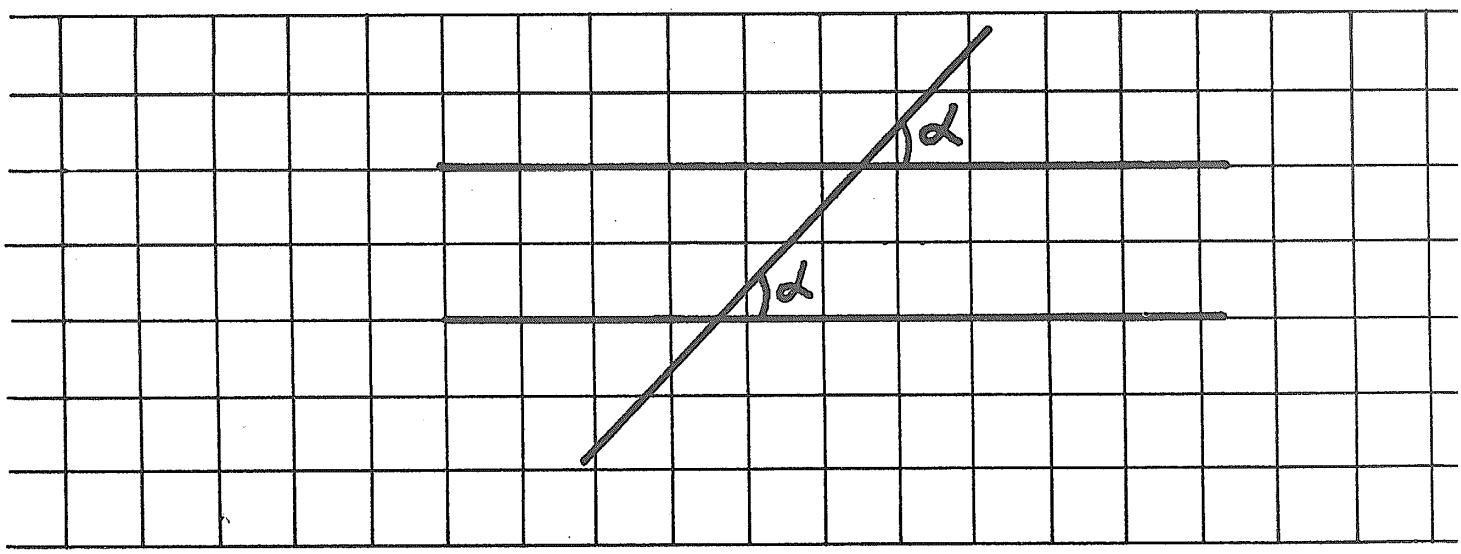
Ángulos y Triángulos

Obras que integran el bloque 4 *(Geometría euclidiana)*:

1. Conjuntos de puntos
2. Relaciones binarias
3. Figuras planas
4. ***El aparato demostrativo. Ángulos y triángulos***
5. Polígonos convexos
6. Relación de semejanza
7. Geometría métrica en el plano
8. Cuerpos geométricos

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 4

Geometría euclidiana

Módulo 4

EL APARATO DEMOSTRATIVO

Ángulos y Triángulos

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia, España, Venezuela.

Revisión técnica: *Myriam P. Acuña Monsalve*
Licenciada en economía,
Universidad Nacional
Autónoma de México

La presentación y disposición en conjunto de
EL APARATO DEMOSTRATIVO (ÁNGULOS Y TRIÁNGULOS)
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1984, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, abril 1984
ISBN 968-24-1243-9

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

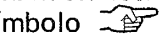
Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo  , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquéllos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

4.1 La demostración

4.2 Congruencia de ángulos opuestos por el vértice

4.3 Ángulo determinado por las bisectrices de dos ángulos adyacentes

4.4 Intersección de rectas concurrentes en un plano

4.5 Congruencia de ángulos correspondientes, alternos internos y alternos externos

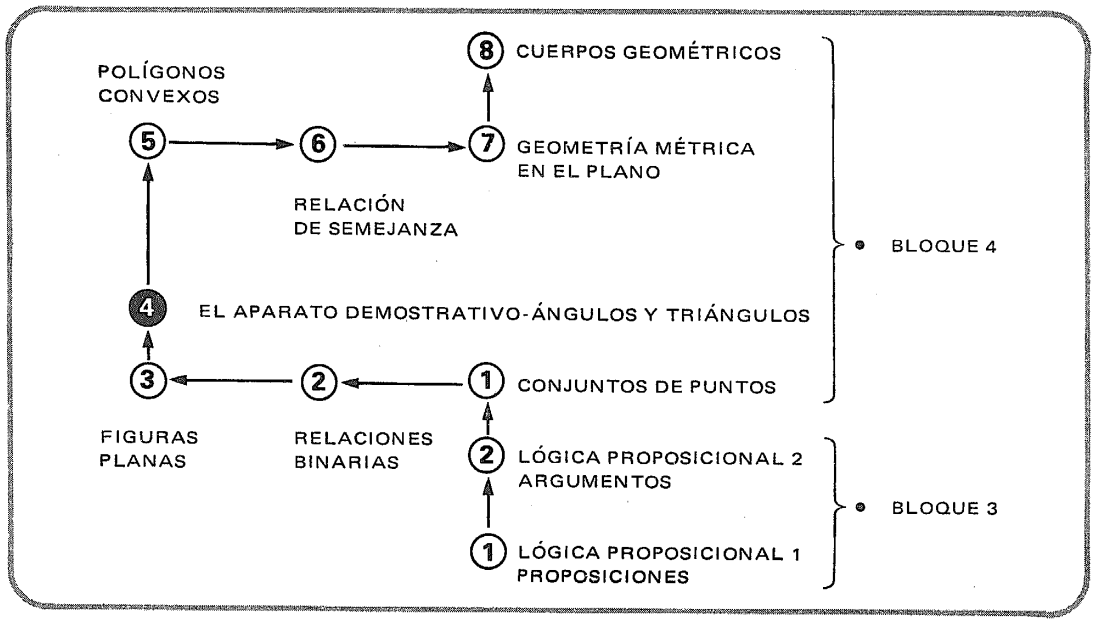
4.6 Perpendicularidad y paralelismo

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 4. Geometría euclidiana

Objetivos: establecer algunos hechos geométricos relacionados con ciertos conjuntos de puntos y demostrar determinados teoremas a partir de un grupo dado de axiomas o postulados básicos, aplicando las reglas del juego de la lógica

Esquema estructural del bloque 4



Módulo 4. El aparato demostrativo. Ángulos y triángulos

Objetivos: demostrar algunos teoremas de la geometría euclidiana, a partir de un conjunto dado de axiomas o postulados básicos y al aplicar las reglas del juego de la lógica

Prerrequisitos:

	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Nociones de lógica matemática	3	1, 2
• Conceptos geométricos básicos	4	1

4.1

La demostración

1

En nuestro estudio
de la geometría,
consideramos

tres términos no definidos:

Simbólicamente

- **punto:** A, B, C,. . . *Z*
- **recta:** a, b, c, ... z $\overleftrightarrow{AB}$
- **plano:** $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \Omega$ $\overline{ABC}$

2

Con

- los términos no definidos,
- algunos otros del lenguaje conjuntista, y
- vocablos del lenguaje común con significado sobreentendido

podemos construir las
definiciones de otros términos.

3

He aquí algunos **términos definidos.**

1. **Espacio E**: conjunto de todos los puntos.
2. **Figura geométrica**: cualquier subconjunto de puntos del espacio.
3. **Figura plana**: cualquier subconjunto de puntos en un plano.
4. **Cuerpo geométrico**: cualquier subconjunto de puntos en el "espacio tridimensional".

(continúa)

4

5. **Semirrecta $\overrightarrow{OA}$**: cada uno de los dos subconjuntos ajenos de puntos, en que una recta queda dividida por un punto perteneciente a ella, llamado "origen".
6. **Rayo $\overrightarrow{OA}$**: unión de una semirrecta y su origen.
7. **Segmento de recta $\overline{AB}$**: intersección de dos rayos ($\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$).
8. **Curva cerrada simple (noción)**: figura plana que puede ser trazada a partir de un punto y regresar a él "sin intersecarse consigo misma".

5

9. **Polígono**: curva cerrada simple formada por la unión de tres o más segmentos de recta.
10. **Lado de un polígono**: cada uno de los segmentos de recta que lo determinan.
11. **Triángulo** $\triangle ABC$: polígono de tres lados.
12. **Ángulo** $\angle AOB$: unión de dos rayos con origen común llamado **vértice.**

6

Hasta el momento
hemos establecido seis proposiciones elementales
aceptadas sin demostración, a las que hemos
llamado **axiomas o postulados.**

7

Axiomas o postulados básicos

A1. *Dos puntos distintos determinan una recta única.*

A2. *Tres puntos no colineales determinan un plano único.*

A3. *Si dos puntos distintos pertenecen a un plano, entonces la recta que determinan está incluida en dicho plano.*

8

A4. *Si* r *es una recta y* P *un punto, entonces existe una recta única que contiene a* P *y es paralela a* r.

A5. *Si* r *es una recta y* P *un punto, ambos contenidos en un mismo plano, entonces existe una perpendicular a* r *que contiene a* P, *y sólo una.*

A6. *Dos rectas intersecadas por una transversal son paralelas si y sólo si los ángulos correspondientes son congruentes.*

9

Por otra parte
hemos definido
una **relación de equivalencia**
como una "relación binaria" de la forma **xRy**
teniendo las propiedades siguientes:

P1. *Reflexividad* xRx

P2. *Simetría* $xRy \Rightarrow yRx$

P3. *Transitividad* $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

10

Algunas relaciones de equivalencia
estudiadas:

- igualdad
- congruencia
- paralelismo

11

La **relación de igualdad**

tiene, además de las propiedades enumeradas en el cuadro 9, las siguientes propiedades adicionales:

P4. *Aditividad*

$$\begin{cases} x = y \Rightarrow x + a = y + a \\ x = y \Rightarrow x - a = y - a \end{cases}$$

P5. *Multiplicatividad*

$$\begin{cases} x = y \Rightarrow x \cdot a = y \cdot a \\ x = y \Rightarrow x/a = y/a \quad a \neq o \end{cases}$$

12

Vamos a considerar
aquí otra
propiedad importante:

P6. *Sustitutividad,*

que podemos enunciar así:

> *"Toda expresión puede ser sustituida por otra equivalente."*

13

Deberemos tener presentes algunas
propiedades de las operaciones binarias
estudiadas anteriormente.

P7. *Asociatividad de la adición*: $(x + y) + z = x + (y + z)$

P8. *Asociatividad de la multiplicación*: $(xy)z = x(yz)$

P9. *Conmutatividad de la adición*: $x + y = y + x$

P10. *Conmutatividad de la multiplicación*: $xy = yx$

P11. *Distributividad de la multiplicación con respecto a la suma*: $(x + y)z = xz + yz$

14

Ahora, el
juego consiste
en **demostrar**
la verdad o falsedad
de otras proposiciones
referidas a ciertos
hechos geométricos.

15

A las proposiciones
que habremos de
demostrar a
partir de los axiomas
o postulados básicos
les llamaremos

teoremas.

16

Podemos enunciar
un teorema
como una
proposición de
la forma: **si p entonces q**
a la que hemos llamado:
proposición

└_____┘

condicional

17

Recordemos que una

proposición condicional

puede ser
simbolizada, en
forma general, así:

└_____┘

$p \Rightarrow q$

18

En la forma lógica $p \Rightarrow q$,
a la proposición p,
que puede ser simple o compuesta,
le hemos llamado:

[_____] ,

y a la proposición q
que también puede ser simple o
compuesta:

[_____] .

antecedente
o hipótesis

consecuente,
tesis
o conclusión

19

Podemos escribir:

si **Hipótesis** entonces **Tesis o conclusión**

o bien,

si **H** entonces **C.**

20

En el enunciado:

Si dos lados de un triángulo son congruentes,
entonces sus ángulos opuestos también lo son,

la hipótesis es [_____] ,

y la conclusión o tesis es [_____] .

dos lados de un triángulo son congruentes

sus ángulos opuestos también lo son (es decir: son congruentes)

21

En el enunciado:

Si ∡A, ∡B *y* ∡C *representan las medidas, en grados, de los ángulos interiores de un triángulo, entonces*: ∡A + ∡B + ∡C = 180°,

la hipótesis es [_____] ,

y la conclusión o tesis es [_____] .

∡A, ∡B *y* ∡C *representan las medidas, en grados, de los ángulos interiores de un triángulo*

∡A + ∡B + ∡C = 180°

22

En el enunciado:

Si dos rectas en un plano son perpendiculares a una tercera, entonces son paralelas entre sí,

la hipótesis es [_____] , y

la conclusión es [_____] .

dos rectas en un plano son perpendiculares a una tercera

(las dos rectas) *son paralelas entre sí*

23

El enunciado:

Dos triángulos son congruentes cuando tienen sus lados respectivamente congruentes,

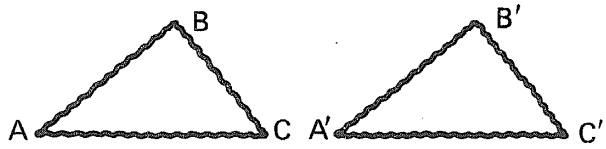
puede expresarse en la forma: **si H entonces C,** como sigue:

[_____] .

Por ejemplo:

si dos triángulos tienen sus lados respectivamente congruentes, entonces son congruentes

24



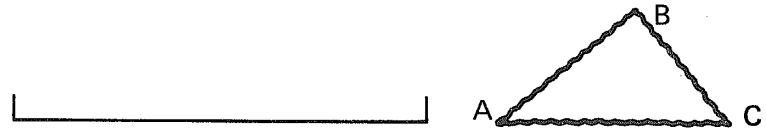
En relación con la figura adjunta, lo anterior podría expresarse así:

$$\underbrace{\overline{AB} \cong \overline{A'B'} \wedge \overline{BC} \cong \overline{B'C'} \wedge \overline{AC} \cong \overline{A'C'}}_{\text{Hipótesis}} \Rightarrow \underbrace{\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'}_{\text{Conclusión (o Tesis)}}$$

25

En todo triángulo, la medida de un lado es menor que la suma de las medidas de los otros dos.

Expresión simbólica de la forma H ⇒ C:



con referencia a la figura adjunta.

Por ejemplo:

ABC es un $\triangle \Rightarrow$

$$(|\overline{AB}| < |\overline{BC}| + |\overline{AC}|)$$
$$\vee (|\overline{BC}| < |\overline{AB}| + |\overline{AC}|)$$
$$\vee (|\overline{AC}| < |\overline{AB}| + |\overline{BC}|)$$

26

$$\underbrace{\text{ABC es un } \triangle \Rightarrow}_{\text{Hipótesis}}$$

$$\underbrace{(|\overline{AB}| < |\overline{BC}| + |\overline{AC}|) \vee (|\overline{BC}| < |\overline{AB}| + |\overline{AC}|) \vee (|\overline{AC}| < |\overline{AB}| + |\overline{BC}|)}_{\text{Conclusión o tesis}}$$

4.4.1.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

27

Recordemos que,

dada la proposición condicional $p \Rightarrow q$
a la proposición $q \Rightarrow p$

le hemos llamado [_____] de $p \Rightarrow q$.

recíproca

28

La proposición recíproca de:

Si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces sus ángulos opuestos también lo son,

sería: [_____]

Por ejemplo:

si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces sus lados opuestos también lo son

29

La recíproca de:

Si ∡A, ∡B *y* ∡C *representan las medidas, en grados de los ángulos interiores de un triángulo, entonces:* ∡A + ∡B + ∡C = 180°;

sería: _____

Por ejemplo:

si ∡A + ∡B + ∡C = 180°, *entonces* ∡A, ∡B *y* ∡C *representan las medidas en grados de los ángulos interiores de un triángulo*

30

La recíproca de:

Si dos triángulos tienen sus lados respectivamente congruentes, entonces son congruentes,

sería: _____

Por ejemplo:

si dos triángulos son congruentes entonces tienen sus lados respectivamente congruentes

4.4.1.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

31

Algunos teoremas
pueden enunciarse en la forma $p \iff q$.
A esta forma lógica le hemos dado el nombre de

[ ]

bicondicional

32

Recordemos
que
$p \iff q$ equivale a [ ]

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

33

$p \iff q$

es la conjunción de dos proposiciones:

$p \Rightarrow q$

y su recíproca $q \Rightarrow p$

34

Dado un enunciado de la forma: $p \Leftrightarrow q$

debemos demostrar: $p \Rightarrow q$

y su recíproco: $q \Rightarrow p$.

35

$p \Leftrightarrow q$

se lee: _____

p *si y sólo si* q

36

El axioma 6 tiene la forma: **p si y sólo si q:**

Dos rectas intersecadas por una tercera son paralelas
si y sólo si
los ángulos correspondientes son congruentes

es equivalente a:

_____

y

_____ .

Por ejemplo:

- *si dos rectas intersecadas por una tercera son paralelas, entonces los ángulos correspondientes son congruentes*
- *si los ángulos correspondientes formados por dos rectas intersecadas por una tercera son congruentes, entonces las dos rectas son paralelas*

37

En este estudio, la **demostración** adoptará, por lo general, la forma:

$$(P1 \wedge P2 \wedge P3 \wedge \ldots \wedge Pn) \vdash C$$

Premisas — Tesis o conclusión

38

Formato de demostración que utilizaremos.

Proposiciones:

Premisas

1. P1
2. P2
3. P3
. .
. .
. .
↓ ↓
n Pn

⊢

Conclusión C

* Lo cual debíamos demostrar

Razones:

1.
2.
3.
. . . ↓
n

LCDD*

39

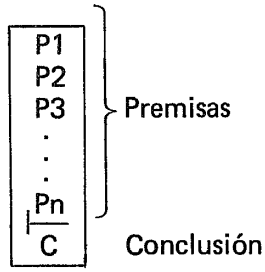
En algunos casos, en que la prueba directa se dificulta podemos recurrir a la llamada

prueba indirecta

que consiste en suponer como premisa adicional la **negación de la conclusión,** de lo cual se inferirá una **contradicción.**

40

Supongamos que
la representación



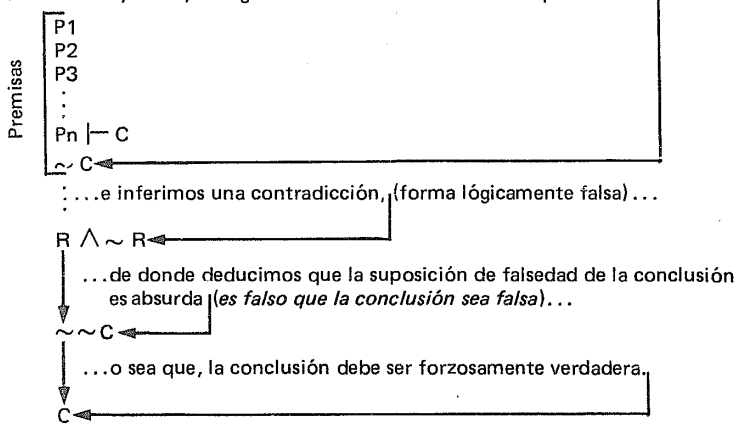
corresponde a un argumento válido.

Recordemos que en un argumento válido no puede ocurrir que las premisas sean verdaderas y la conclusión sea falsa.

41

Atención

Consideramos, ahora, la negación de la conclusión como la premisa. .



42

Método de reducción al absurdo

se le llama
al procedimiento
bosquejado
en el cuadro anterior.

4.4.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *enunciar* un teorema como una proposición condicional de la forma: *si* p *entonces* q; *o como una proposición bicondicional de la forma*: p *si y sólo si* q;

- *expresar* un enunciado de la forma: p *si y sólo si* q como la conjunción de dos enunciados condicionales: *si* p *entonces* q y *si* q *entonces* p;

- *enunciar* la recíproca de una proposición dada.

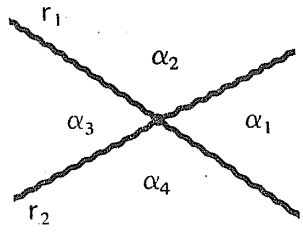
4.2

Congruencia de
ángulos opuestos por el vértice

43

Consideremos dos rectas concurrentes (r_1 y r_2) que determinan los cuatro ángulos mostrados en la figura.

A los ángulos α_1 y α_3 les hemos llamado



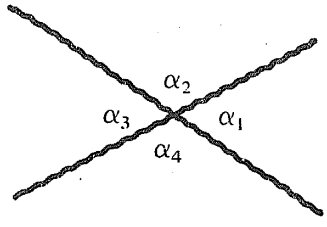
opuestos por el vértice

44

También son

opuestos por el vértice

los ángulos

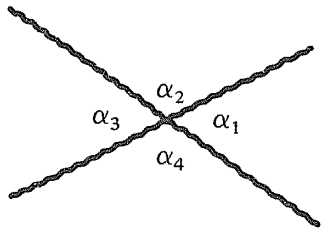


α_2 y α_4

45

A los ángulos α_1 y α_2 los denominamos

_____



adyacentes

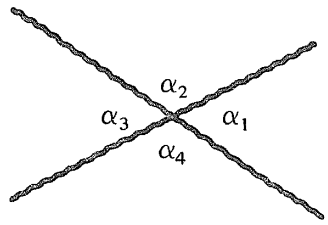
46

Otros pares de ángulos **adyacentes** son:

_____ y _____ ,

_____ y _____ ,

_____ y _____ .



$< \alpha_2 < \alpha_3$

$< \alpha_3 < \alpha_4$

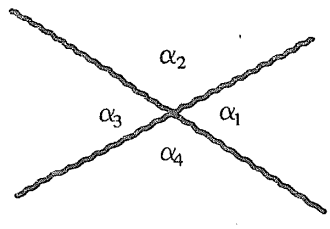
$< \alpha_4 < \alpha_1$

en cualquier orden.

47

Podemos observar que:

la suma de las medidas de dos ángulos adyacentes es igual a la medida de un ángulo _____ .



llano

48

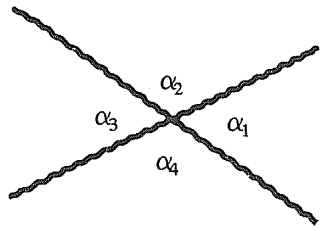
Si la unidad de medida utilizada es el grado:

$\measuredangle\alpha_1 + \measuredangle\alpha_2 =$ [_____],

$\measuredangle\alpha_2 + \measuredangle\alpha_3 =$ [_____],

$\measuredangle\alpha_3 + \measuredangle\alpha_4 =$ [_____],

$\measuredangle\alpha_4 + \measuredangle\alpha_1 =$ [_____].



180°

180°

180°

180°

49

Si la suma de las medidas de dos ángulos es igual a la medida de un ángulo llano, decimos que:

los dos ángulos son [_____],

o uno es [_____] del otro.

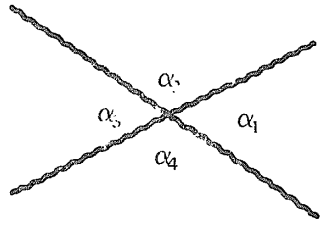
suplementarios

suplementario o suplemento

50

Podemos afirmar, entonces, que

dos ángulos adyacentes son [_____]

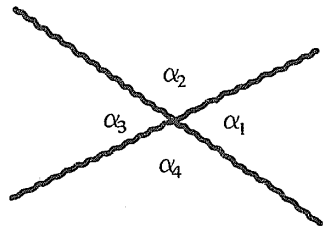


suplementarios

51

Atención.

Ahora bien,
¿qué podríamos, intuitivamente,
afirmar acerca de los
ángulos opuestos por el vértice?



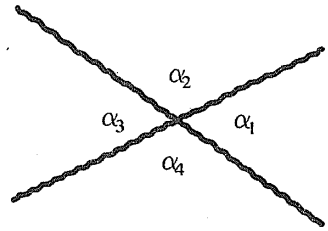
Por ejemplo:

que son congruentes

52

Conjetura:

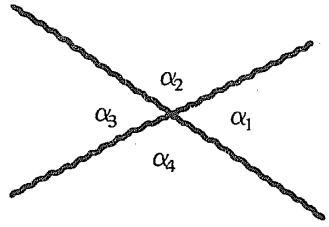
Dos ángulos opuestos por el vértice son congruentes.



53

Dos ángulos opuestos
por el vértice
son congruentes.

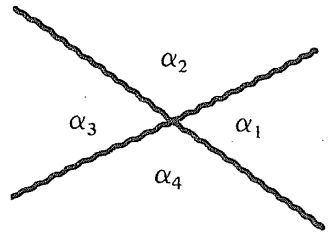
Proposición equivalente
de la forma
si p *entonces* q:



Si *dos ángulos son opuestos por el vértice,*
entonces *son congruentes*

54

Si *dos ángulos son opuestos por el vértice,* entonces *son congruentes.*



Expresión simbólica equivalente de la forma $p \Rightarrow q$, con referencia al croquis adjunto:

$_____$

$<\alpha_1$ y $<\alpha_3$ son opuestos por el vértice

$\Rightarrow <\alpha_1 \cong <\alpha_3$

o bien,

$<\alpha_2$ y $<\alpha_4$ son opuestos por el vértice

$\Rightarrow <\alpha_2 \cong <\alpha_4$

55

Si *dos ángulos son opuestos por el vértice,* entonces *son congruentes.*

$<\alpha_1$ y $<\alpha_3$ son opuestos por el vértice $\Rightarrow <\alpha_1 \cong <\alpha_3$.

La Hipótesis es: $_____$

dos ángulos son opuestos por el vértice,

o

$<\alpha_1$ y $<\alpha_3$ son opuestos por el vértice

56

Señalar la opción correcta.

Si *dos ángulos son opuestos por el vértice,* entonces *son congruentes.*

$<\alpha_1$ y $<\alpha_3$ son opuestos por el vértice $\Rightarrow <\alpha_1 \cong <\alpha_3$.

La Hipótesis es una proposición **simple/ compuesta.**

simple

57

Si *dos ángulos son opuestos por el vértice,*
entonces *son congruentes.*

$<\alpha_1$ y $<\alpha_3$ son opuestos por el vértice $\Rightarrow <\alpha_1 \cong <\alpha_3$.

La **conclusión** o **tesis** es: [_____]

(los dos ángulos) son congruentes

o

$<\alpha_1 \cong <\alpha_3$

58

Señalar la opción correcta:

Si *dos ángulos son opuestos por el vértice,*
entonces *son congruentes.*

$<\alpha_1$ y $<\alpha_3$ son opuestos por el vértice $\Rightarrow <\alpha_1 \cong <\alpha_3$.

La conclusión es una proposición **simple/compuesta.**

simple

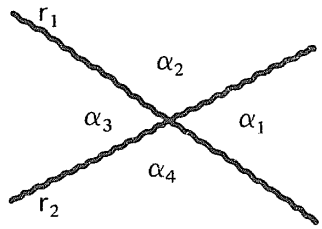
59

Entonces,
se requiere demostrar que:

Si *dos ángulos son opuestos por el vértice,*
entonces *son congruentes.*

60

Hipótesis: **Sean** r_1 y r_2 dos rectas concurrentes que determinan los ángulos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ y α_4, tales que $<\alpha_1$ y $<\alpha_2$ son opuestos por el vértice y $<\alpha_2$ y $<\alpha_4$ son opuestos por el vértice.



Tesis o conclusión: Demostrar que:

[ ]

$<\alpha_1 \cong <\alpha_3$

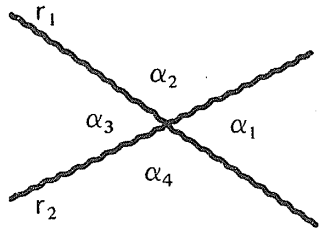
o

$<\alpha_2 \cong <\alpha_4$

61

Intentaremos demostrar*, en primer lugar, que:

$<\alpha_1 \cong <\alpha_3$



* En este punto, es necesario detenernos y bosquejar "un plan de acción" para el desarrollo de la demostración.

62

Empezamos escribiendo:

Demostrar que $<\alpha_1 \cong <\alpha_3$

Proposiciones:	Razones:
1. $\measuredangle\alpha_1 + \measuredangle\alpha_2 = 180°$	1. [ ]

No perder de vista la figura del cuadro 61.

$<\alpha_1$ y $<\alpha_2$ son adyacentes.
Si $<\alpha_1$ y $<\alpha_2$ son adyacentes, entonces son suplementarios.
Si $<\alpha_1$ y $<\alpha_2$ son suplementarios y la medida utilizada es el grado entonces;
$\measuredangle\alpha_1 + \measuredangle\alpha_2 = 180°$

63

Demostrar que $<\alpha_1 \cong <\alpha_3$

Proposiciones:	Razones:
1. $\measuredangle\alpha_1 + \measuredangle\alpha_2 = 180°$	1. $<\alpha_1$ y $<\alpha_2$ son adyacentes.
2. $\measuredangle\alpha_2 + \measuredangle\alpha_3 =$ ⌊____⌋ .	2. ⌊_____⌋ .

- $180°$

En forma abreviada:

- $<\alpha_2$ y $<\alpha_3$ son adyacentes y por lo tanto suplementarios

64

Atención.

Demostrar que $<\alpha_1 \cong <\alpha_3$.

Proposiciones:	Razones:
1. $\measuredangle\alpha_1 + \measuredangle\alpha_2 = 180°$	1. $<\alpha_1$ y $<\alpha_2$ son adyacentes.
2. $\measuredangle\alpha_2 + \measuredangle\alpha_3 = 180°$	2. $<\alpha_2$ y $<\alpha_3$ son adyacentes.
3. ⌊_____⌋.	3. ⌊_____⌋ .

¿Qué podemos concluir de 1 y 2 ?

- $\measuredangle\alpha_1 + \measuredangle\alpha_2 = \measuredangle\alpha_2 + \measuredangle\alpha_3$
- P3. Transitividad de la relación de igualdad

65

Atención.

Demostrar que $<\alpha_1 \cong <\alpha_3$.

Proposiciones:	Razones:
1. $\measuredangle\alpha_1 + \measuredangle\alpha_2 = 180°$	1. $<\alpha_1$ y $<\alpha_2$ son adyacentes
2. $\measuredangle\alpha_2 + \measuredangle\alpha_3 = 180°$	2. $<\alpha_2$ y $<\alpha_3$ son adyacentes
3. $\measuredangle\alpha_1 + \measuredangle\alpha_2 = \measuredangle\alpha_2 + \measuredangle\alpha_3$	3. P3. Transitividad de la relación de igualdad
4. ⌊_____⌋ .	4. ⌊_____⌋ .

¿Qué podemos concluir de 3 ?

- $\measuredangle\alpha_1 + \measuredangle\alpha_2 = \measuredangle\alpha_3 + \measuredangle\alpha_2$

Por P9. Conmutatividad de la adición aplicada al segundo miembro.

- $\measuredangle\alpha_1 + \measuredangle\alpha_2 - \measuredangle\alpha_2 = \measuredangle\alpha_3 + \measuredangle\alpha_2 - \measuredangle\alpha_2$

Por P4. Aditividad de la relación de igualdad

$\measuredangle\alpha_1 = \measuredangle\alpha_3$

puesto que:

$\measuredangle\alpha_2 - \measuredangle\alpha_2 = 0$

66

Demostrar que $<\alpha_1 \cong <\alpha_3$.

Proposiciones:	Razones:
1. $\measuredangle\alpha_1 + \measuredangle\alpha_2 = 180°$	1. Son adyacentes.
2. $\measuredangle\alpha_2 + \measuredangle\alpha_3 = 180°$	2. Son adyacentes.
3. $\measuredangle\alpha_1 + \measuredangle\alpha_2 = \measuredangle\alpha_2 + \measuredangle\alpha_3$	3. P3.
4. $\measuredangle\alpha_1 = \measuredangle\alpha_3$	4. P9 y P4.
⊢	
5. $<\alpha_1 \cong <\alpha_3$	5. [_____].

definición de congruencia de ángulos
$<\alpha_1 \cong <\alpha_3 \iff \measuredangle\alpha_1 = \measuredangle\alpha_3$

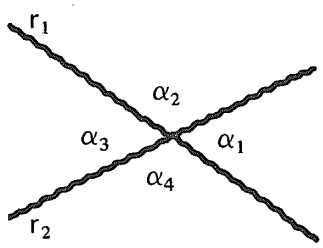
67

Estudiar con atención la demostración completa presentada en los cuadros siguientes.

68

Teorema 1.

Si *dos ángulos son opuestos por el vértice,* entonces *son congruentes.*



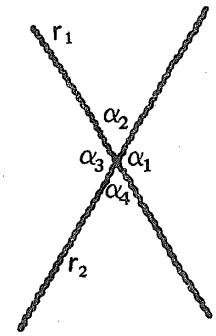
Hipótesis: Sean r_1 y r_2 dos rectas concurrentes que determinan los ángulos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ y α_4 tales que: $<\alpha_1$ y $<\alpha_3$ son opuestos por el vértice.

Tesis o conclusión: Demostrar que $<\alpha_1 \cong <\alpha_3$.

69

Demostración

	Proposiciones:	Razones:
Premisas	1. $\measuredangle\alpha_1 + \measuredangle\alpha_2 = 180°$	1. Son adyacentes.
Premisas	2. $\measuredangle\alpha_2 + \measuredangle\alpha_3 = 180°$	2. Son adyacentes.
Premisas	3. $\measuredangle\alpha_1 + \measuredangle\alpha_2 = \measuredangle\alpha_2 + \measuredangle\alpha_3$	3. P3.
Premisas	4. $\measuredangle\alpha_1 = \measuredangle\alpha_3$	4. P9 y P4
Conclusión	5. $<\alpha_1 \cong <\alpha_3$ LCDD	5. Definición de congruencia de ángulos

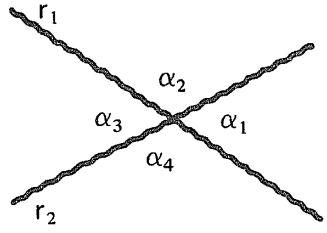


70

Ahora,

demostrar que $<\alpha_2 \cong <\alpha_4$.

	Proposiciones:	Razones:
Premisas		
Conclusión	LCDD	

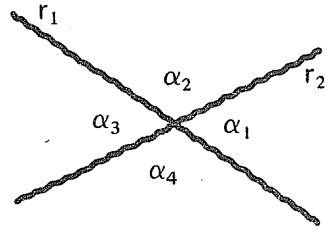


Comparar con la demostración presentada en el cuadro siguiente.

71

Demostrar que $<\alpha_2 \cong <\alpha_4$.

Proposiciones:	Razones:
1. $\measuredangle\alpha_2 + \measuredangle\alpha_3 = 180°$	1. Son adyacentes.
2. $\measuredangle\alpha_3 + \measuredangle\alpha_4 = 180°$	2. Son adyacentes.
3. $\measuredangle\alpha_2 + \measuredangle\alpha_3 = \measuredangle\alpha_3 + \measuredangle\alpha_4$	3. P3.
4. $\measuredangle\alpha_2 = \measuredangle\alpha_4$	4. P9 y P4.
5. $<\alpha_2 \cong <\alpha_4$ LCDD	5. Definición de congruencia de ángulos.



4.4.2.1

Práctica adicional
de demostración por
prueba directa de
otros teoremas sencillos,
si se considera necesario.

4.4.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *demostrar* el **teorema 1:**

  Si *dos ángulos son opuestos por el vértice,*
  entonces *son congruentes,*

  utilizando el modelo de demostración
  estudiado;

- *demostrar*, de manera tentativa, otros
  teoremas análogos al estudiado.

4.3

Ángulo determinado por las bisectrices de dos ángulos adyacentes

72

Se requiere demostrar que:

Las bisectrices de dos ángulos adyacentes determinan un ángulo recto.

73

Empecemos escribiendo el enunciado:

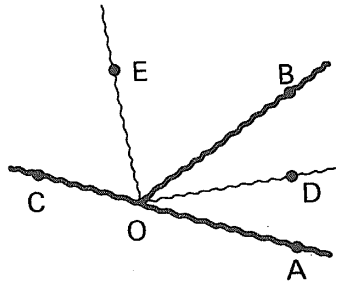
Las bisectrices de dos ángulos adyacentes determinan un ángulo recto

en la forma **si p entonces q:**

Si *dos ángulos son adyacentes,*
entonces *sus bisectrices determinan un ángulo recto*

74

Si *dos ángulos son adyacentes*, entonces *sus bisectrices determinan un ángulo recto.*



Expresión simbólica equivalente, de la forma $p \Rightarrow q$ con referencia a la figura adjunta.

Por ejemplo:

(<AOB *y* <BOC *son adyacentes* y $\overrightarrow{OD}$ *es la bisectriz del* <AOB y $\overrightarrow{OE}$ *es la bisectriz del* <BOC) ⇒ <DOE *es recto.*

75

(<AOB *y* <BOC *son adyacentes adyacentes y* $\overrightarrow{OD}$ *es la bisectriz de* <AOB *y* $\overrightarrow{OE}$ *es bisectriz de* <BOC) ⇒ <DOE *es recto.*

La Hipótesis es

y se trata de una proposición **simple/compuesta.**

● <AOB *y* <BOC *son adyacentes y* $\overrightarrow{OD}$ *es la bisectriz de* <AOB *y* $\overrightarrow{OE}$ *es la bisectriz de* <BOC

compuesta

76

Estudiar con mucha atención.

Hipótesis (H): conjunción de las proposiciones H1, H2 y H3.

H1

<AOB *y* <BOC *son adyacentes*

H2

$\wedge$ $\overrightarrow{OD}$ *es bisectriz de* < AOB

H3

$\wedge$ $\overrightarrow{OE}$ *es bisectriz de* <BOC ⇒ *<DOE es recto*

Tesis o conclusión (C)

77

Escribamos la hipótesis en la forma indicada:

Sea(n):

- ● ⌊——————————⌋ (H1)
- ● ⌊——————————⌋ (H2)
- ● ⌊——————————⌋ (H3)

Por ejemplo:

$\angle AOB$ *y* $\angle BOC$ *ángulos adyacentes*

$\overrightarrow{OD}$ *la bisectriz del* $\angle AOB$

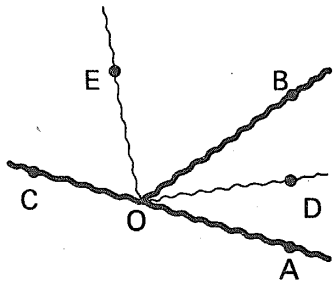
$\overrightarrow{OE}$ *la bisectriz del* $\angle BOC$

78

Sean:

Hipótesis

- ● $\angle AOB$ *y* $\angle BOC$ *ángulos adyacentes* (H1)
- ● $\overrightarrow{OD}$ *la bisectriz del* $\angle AOB$ (H2)
- ● $\overrightarrow{OE}$ *la bisectriz del* $\angle BOC$ (H3)



Tesis o conclusión

Demostrar que ⌊——————⌋

$\angle DOE$ *es recto*

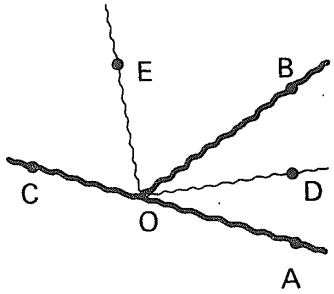
79

Tenemos:

Hipótesis

sean:

- ● $\angle AOB$ *y* $\angle BOC$ *ángulos adyacentes* (H1).
- ● $\overrightarrow{OD}$ *la bisectriz del* $\angle AOB$ (H2).
- ● $\overrightarrow{OE}$ *la bisectriz del* $\angle BOC$ (H3).



Tesis

Demostrar que **$\angle DOE$ es recto.**

80

Detengámonos y
tracemos una estrategia
para la demostración.

81

En los cuadros que siguen,
llevaremos a cabo

una cierta estrategia*,

no la única posible,
para la demostración requerida.

* Debemos tener a la vista la información contenida en el cuadro 79.

82

Demostración

Proposiciones:	Razones:
1. $\measuredangle AOB + \measuredangle BOC =$ [____].	1. [_____]

- 180°
- son adyacentes (H_1), y por lo tanto suplementarios.

83

Proposiciones:

1. $\measuredangle AOB + \measuredangle BOC = 180°$
2. $(\measuredangle AOD + \measuredangle DOB) + (\measuredangle BOE + \measuredangle EOC) = 180°$

Razones:

1. H1.
2. [_____].

Por P6. Sustitutividad, puesto que:

$\measuredangle AOB = \measuredangle AOD + \measuredangle DOB$

$\measuredangle BOC = \measuredangle BOE + \measuredangle EOC$

porque:

$\angle AOD$ y $\angle DOB$ son consecutivos y

$\angle BOE$ y $\angle EOC$ son consecutivos.

84

Proposiciones:

1. $\measuredangle AOB + \measuredangle BOC = 180°$
2. $(\measuredangle AOD + \measuredangle DOB) + (\measuredangle BOE + \measuredangle EOC) = 180°$
3. $(\measuredangle DOB + \measuredangle DOB) + (\measuredangle BOE + \measuredangle BOE) = 180°$

Razones:

1. H1.
2. P6.
3. [_____].

Por P6. Sustitutividad:

- $\measuredangle AOD = \measuredangle DOB$
- $\measuredangle EOC = \measuredangle BOE$

puesto que:

$\overleftrightarrow{OD}$ es bisectriz del $\angle AOB$ (H2),

$\overleftrightarrow{OE}$ es bisectriz del $\angle BOC$ (H3),

y por definición de bisectriz:

$\overleftrightarrow{OD}$ es bisectriz del $\angle AOB \Leftrightarrow \measuredangle AOD = \measuredangle DOB$

$\overleftrightarrow{OE}$ es bisectriz del $\angle BOC \Leftrightarrow \measuredangle EOC = \measuredangle BOE$

85

Proposiciones:

1. $\measuredangle AOB + \measuredangle BOC = 180°$
2. $(\measuredangle AOD + \measuredangle DOB) + (\measuredangle BOE + \measuredangle EOC) = 180°$
3. $(\measuredangle DOB + \measuredangle DOB) + (\measuredangle BOE + \measuredangle BOE) = 180°$
4. $2\measuredangle DOB + 2\measuredangle BOE = 180°$

Razones:

1. H1
2. P6.
3. P6, H2, H3
4. [_____].

P6. Propiedad sustitutiva:

$\measuredangle DOB + \measuredangle DOB = 2\measuredangle DOB$

$\measuredangle BOE + \measuredangle BOE = 2\measuredangle BOE$

por "reducción de términos semejantes".

86

Proposiciones:

3. $(\measuredangle DOB + \measuredangle DOB) + (\measuredangle BOE + \measuredangle BOE) = 180°$

4. $2\measuredangle DOB + 2\measuredangle BOE = 180°$

5. $2(\measuredangle DOB + \measuredangle BOE) = 180°$

Razones:

3. P6, H2, H3

4. P6

5. [_____].

P11. Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición:

$2\measuredangle DOB + 2\measuredangle BOE = 2(\measuredangle DOB + \measuredangle BOE)$.

87

Proposiciones:

4. $2\measuredangle DOB + 2\measuredangle BOE = 180°$

5. $2(\measuredangle DOB + \measuredangle BOE) = 180°$

6. $2\measuredangle DOE = 180°$

Razones:

4. P6

5. P11

6. [_____].

P6. Propiedad sustitutiva:

$\measuredangle DOB + \measuredangle BOE = \measuredangle DOE$

porque:

$\angle DOB$ y $\angle BOE$ son

consecutivos.

88

Proposiciones:

5. $2(\measuredangle DOB + \measuredangle BOE) = 180°$

6. $2\measuredangle DOE = 180°$

7. $\measuredangle DOE =$ [_____]

Razones:

5. P11

6. P6

7. [_____].

P5. Propiedad multiplicativa de la relación de igualdad:

$$2\measuredangle DOE = 180°$$

$$\frac{1}{2}(2\measuredangle DOE) = \frac{1}{2} \cdot 180°$$

$$\measuredangle DOE = 90°$$

89

Proposiciones

6. $2\,\measuredangle DOE = 180°$

7. $\measuredangle DOE = 90°$

8. ⌊———⌋

Razones:

6. P6

7. P5

8. ⌊———⌋

- $<DOE$ es recto.
- Definición de ángulo recto:

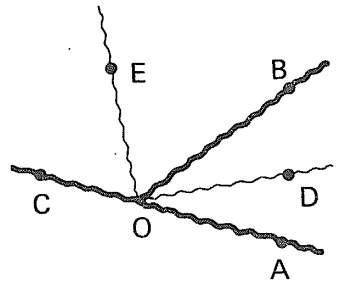
  $\measuredangle DOE = 90° \iff <DOE$ es recto.

90

Estudiar con atención este cuadro y el siguiente.

Teorema 2.

Si *dos ángulos son adyacentes,* entonces *sus bisectrices determinan un ángulo recto.*



Sean

- $<AOB$ *y* $<BOC$ *ángulos adyacentes* (H1)
- $\overrightarrow{DO}$ *la bisectriz de* $<AOB$ (H2)
- $\overrightarrow{OE}$ *la bisectriz de* $<BOC$ (H3)

Demostrar que **$<DOE$ es recto.** (C)

91

Demostración

	Proposiciones:	Razones:
Premisas	1. $\measuredangle AOB + \measuredangle BOC = 180°$	1. H1
	2. $(\measuredangle AOD + \measuredangle DOB) + (\measuredangle BOE + \measuredangle EOC) = 180°$	2. P6
	3. $(\measuredangle DOB + \measuredangle DOB) + (\measuredangle BOE + \measuredangle BOE) = 180°$	3. P6, H2, H3
	4. $2\,\measuredangle DOB + 2\,\measuredangle BOE = 180°$	4. P6
	5. $2(\measuredangle DOB + \measuredangle BOE) = 180°$	5. P11
	6. $2\,\measuredangle DOE = 180°$	6. P6
	7. $\measuredangle DOE = 90°$	7. P5
Conclusión	8. **$<DOE$ es recto** LCDD	8. Definición de ángulo recto.

4.4.3.1

Práctica adicional
de demostración por prueba
directa de otros teoremas
similares al estudiado, si
se considera necesario.

4.4.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *demostrar,* de manera tentativa, el **Teorema 2:**

  Si *dos ángulos son adyacentes,* entonces *sus bisectrices determinan un ángulo recto,*

  utilizando el modelo de demostración estudiado;

- *demostrar*, de manera tentativa, otros teoremas similares al estudiado.

4.4

Intersección de rectas concurrentes en un plano

92

Vamos a intentar la demostración de una proposición que hemos aceptado como

Conjetura 1.

93

Conjetura 1:

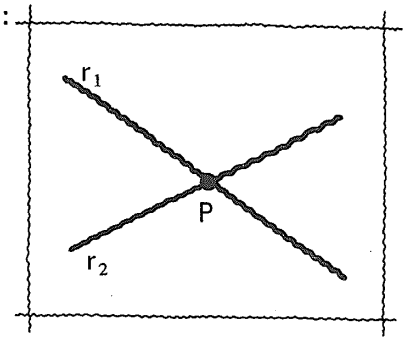
Dos rectas distintas en un plano, cuya intersección es no vacía, se intersecan en un punto único.

94

Con ayuda del trazo adjunto,
vamos a expresar el enunciado:

Dos rectas distintas en un plano cuya intersección es no vacía, se intersecan en un punto único,

como una proposición condicional de la forma **si p entonces q:**



Si r_1 *y* r_2 *son rectas distintas en un plano y su intersección es no vacía,*
entonces
se intersecan en un punto único (P).

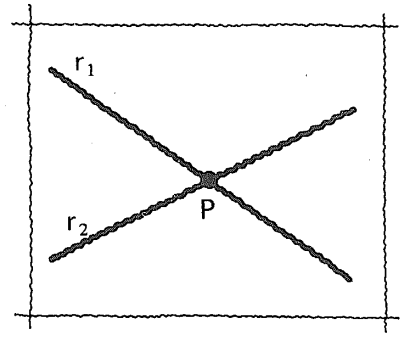
95

Se requiere demostrar la verdad o falsedad de la proposición:

Si r_1 *y* r_2 *son rectas distintas en un plano y su intersección es no vacía,*

entonces

se intersecan en un punto único (P).



96

Señalar la opción correcta.

Si r_1 *y* r_2 *son rectas distintas en un plano y su intersección es no vacía,*
entonces *se intersecan en un punto único.*

Observamos que
la **Hipótesis**, en este caso,
es una
proposición **simple/compuesta.**

compuesta

97

r_1 *y* r_2 *son rectas distintas en un plano y su intersección es no vacía.*

Esta proposición compuesta es equivalente a la conjunción de las siguientes proposiciones elementales que llamaremos:

Hipótesis 1: [_____] ,

Hipótesis 2: [_____] ,

Hipótesis 3: [_____] .

r_1 *y* r_2 *son rectas distintas*

r_1 *y* r_2 *están contenidas en un plano*

la intersección de r_1 *y* r_2 *es no vacía*

98

Señalar la opción correcta y completar.

Si r_1 *y* r_2 *son rectas distintas en un plano, y su intersección es no vacía,* entonces *se intersecan en un punto único* (P).

La **Tesis** o **Conclusión** es: [_____]

y se trata de una proposición **simple/compuesta.**

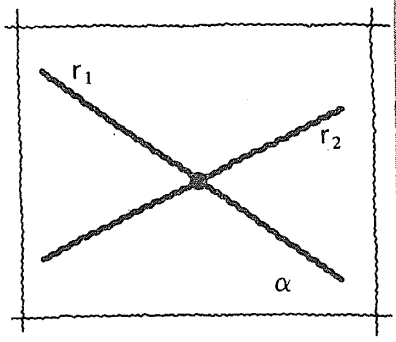
(r_1 *y* r_2) *se intersecan en un punto único* (P)

simple

99

Demostrar que:

Si r_1 *y* r_2 *son rectas distintas en un plano y su intersección es no vacía,* entonces *se intersecan en un punto único.*



Hipótesis { Sea(n) : [_____]

H1 r_1 *y* r_2 *dos rectas distintas* tales que:

H2 r_1 *y* r_2 *están contenidas en un mismo plano* (α)

H3 *la intersección de* r_1 *y* r_2 *es no vacía.*

100

Hipótesis

Sean:

- r_1 *y* r_2 *dos rectas distintas* (H1)

tales que:

- r_1 *y* r_2 *están incluidas en un mismo plano* (α) (H2)
- *la intersección de* r_1 *y* r_2 *es no vacía.* (H3)

Conclusión

Demostrar que:

r_1 *y* r_2 *se intersecan en un punto único*

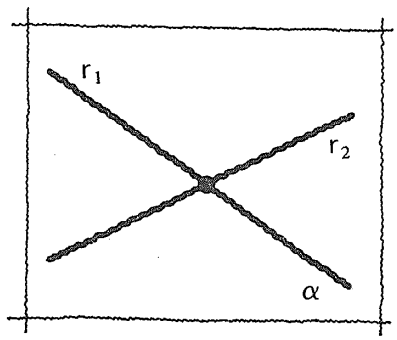
101

Sean:

- r_1 *y* r_2 *dos rectas distintas* (H1)

tales que:

- r_1 *y* r_2 *están incluidas en un mismo plano* (α) (H2)
- *la intersección de* r_1 *y* r_2 *es no vacía.* (H3)



Demostrar que:

r_1 y r_2 se intersecan en un punto único.

102

Detengámonos
y diseñemos
una estrategia
para la demostración.

103

Vamos a intentar,
en este caso,
la prueba indirecta.

104

Empezaremos por

suponer falsa la conclusión,

lo cual deberá conducirnos
a una

contradicción

de la forma

R $\wedge \sim$ R.

105

En nuestro caso, la conclusión es:

r_1 y r_2 se intersecan en un punto único;

la negación de esto sería:

r_1 *y* r_2 *no se intersecan en un punto único*

o bien,

es falso que r_1 *y* r_2 *se intersequen en un punto único*

106

Sean:

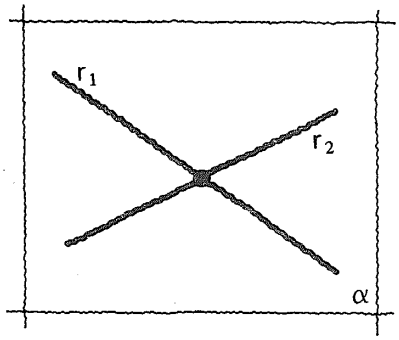
- r_1 *y* r_2 *dos rectas distintas* (H1)

  tales que:

- r_1 *y* r_2 *están incluidas en el mismo plano* (α) (H2)

  y

- *la intersección de* r_1 *y* r_2 *es no vacía.* (H3)



Demostrar que: **r_1 y r_2 se intersecan en un punto único.**

107

Demostración

Proposiciones:	Razones:
1. r_1 *y* r_2 *no se intersecan en un punto único.*	1.
2. *La intersección de* r_1 *y* r_2 *es no vacía (es decir:* r_1 *y* r_2 *sí se intersecan).*	2.
3. r_1 *y* r_2 *se intersecan en más de un punto.*	3.

Atención:

1. Negación de la conclusión.
2. Hipótesis (H3).
3. Puede ocurrir alguna de estas cosas:
   - r_1 y r_2 no se intersecan,
   - r_1 y r_2 se intersecan en un punto único,
   - r_1 y r_2 se intersecan en más de un punto.

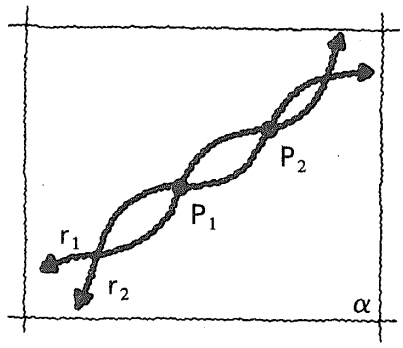
108

Si r_1 *y* r_2 *se intersecan en más de un punto,*

entonces *es posible una situación como ésta,* →

en que:

4. P_1 *y* P_2 *son dos puntos cualesquiera de la intersección de* r_1 *y* r_2.



109

Proposiciones:	Razones:
5. P_1 *y* P_2 *pertenecen a* r_1 *y* r_2.	5. [ ]

Definición de intersección.

$r_1 \cap r_2 = \{P | P \in r_1 \wedge P \in r_2\}$

110

Proposiciones:

5. P_1 *y* P_2 *pertenecen a* r_1 *y a* r_2.

6. P_1 *y* P_2 *no pertenecen a* r_1 *y a* r_2.

Razones:

5. Definición de intersección.
6. [ ]

Dos puntos distintos pertenecen a una recta única.

P_1 y P_2 siendo dos puntos distintos, no pueden pertenecer a dos rectas r_1 y r_2 que, por la Hipótesis H1, son distintas.

111

Proposiciones:	Razones:
5. P_1 *y* P_2 *pertenecen a* r_1 *y a* r_2	5. Definición de intersección.
6. P_1 *y* P_2 *no pertenecen a* r_1 *y a* r_2.	6. Axioma A1
7. P_1 *y* P_2 *pertenecen a* r_1 *y a* r_2, *y* P_1 *y* P_2 *no pertenecen a* r_1 *y a* r_2, contradicción de la forma $R \wedge \sim R$	7. Conjunción de 5 y 6.

112

Estudiar con atención esta demostración.

Proposiciones:	Razones:
1. r_1 *y* r_2 *no se intersecan en un punto único.*	1. Negación de la conclusión.
2. *La intersección de* r_1 *y* r_2 *es no vacía.*	2. Hipótesis H3
3. r_1 *y* r_2 *se intersecan en más de un punto.*	3. Conclusión de 1 y 2
4. P_1 *y* P_2 *son dos puntos cualesquiera de la intersección de* r_1 *y* r_2	4. Hipótesis H4 inferida de 3
5. P_1 *y* P_2 *pertenecen a* r_1 *y a* r_2	5. Definición de intersección.
6. P_1 *y* P_2 *no pertenecen a* r_1 *y a* r_2.	6. Axioma A1
7. P_1 *y* P_2 *pertenecen a* r_1 *y a* r_2 *y* P_1 *y* P_2 *no pertenecen a* r_1 *y a* r_2.	7. Conjunción de 5 y 6.
8. *Es falso que* r_1 *y* r_2 *no se intersequen en un punto único.*	8. Contradición 7.
9. r_1 y r_2 se intersecan en un punto único, LCDD.	9. Definición de la doble negación.

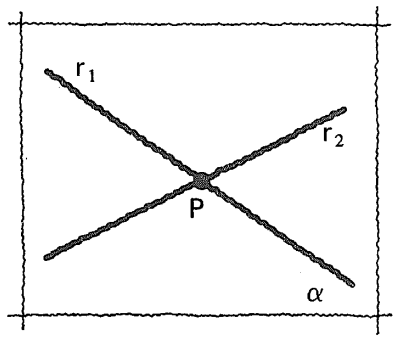
113

En los cuadros siguientes se muestra una representación simbólica de la demostración anterior.

114

Teorema 3.

$r_1 \neq r_2 \wedge r_1 \subset \alpha \wedge r_2 \subset \alpha$
$\wedge\, r_1 \cap r_2 \neq \phi \Rightarrow r_1 \cap r_2 = \{P|P \text{ es único}\}$



115

Sean:

- $r_1 \neq r_2$ (H1)
- $r_1 \subset \alpha \wedge r_2 \subset \alpha$ (H2)
- $r_1 \cap r_2 \neq \phi$ (H3)

Demostrar que: $r_1 \cap r_2 = \{P|P \text{ es único}\}$ (C)

116

Demostración

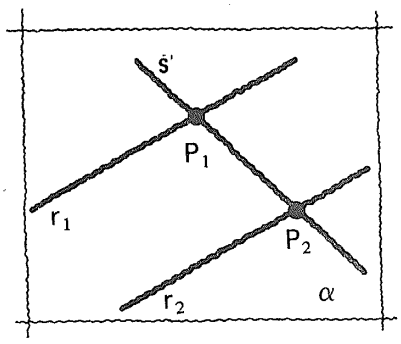
Proposiciones:	Razones:
1. $r_1 \cap r_2 \neq \{P\|P \text{ es único}\}$	1. $\sim C$
2. $r_1 \cap r_2 \neq \phi$	2. H3
3. $r_1 \cap r_2 = \{P_1, P_2, P_3 \ldots P_n\}$	3. De 1 y 2
4. $P_1, P_2 \in (r_1 \cap r_2)$	4. De 3
5. $(P_1, P_2 \in r_1) \wedge (P_1, P_2 \in r_2)$	5. Definición de intersección.
6. $\sim [(P_1, P_2 \in r_1) \wedge (P_1, P_2 \in r_2)]$	6. A1
7. $[(P_1, P_2 \in r_1) \wedge (P_1, P_2 \in r_2)] \wedge \sim [(P_1, P_2 \in r_1) \wedge (P_1, P_2 \in r_2)]$	7. 5 $\wedge$ 6
8. $\sim [r_1 \cap r_2 \neq \{P\|P \text{ es único}\}$	8. $\sim \sim C$
$\vdash$	
9. $r_1 \cap r_2 = \{P\|P \text{ es único}\}$ LCDD	9. C

117

Intentemos demostrar* el teorema siguiente por el método de reducción al absurdo.

Teorema 4.

En un plano, si r_1 *y* r_2 *son rectas paralelas y* s *una tercera recta que interseca a* r_1 *en un punto único* (P_1), *entonces interseca a* r_2 *en un punto único* (P_2).



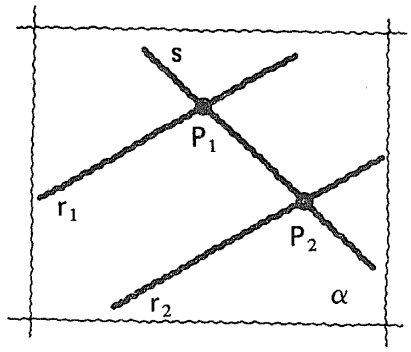
* En los cuadros siguientes encontraremos dos procedimientos alternativos para la demostración.

118

Sea:

- $r_1 \subset \alpha \wedge r_2 \subset \alpha \wedge s \subset \alpha$ (H1)
- $r_1 \parallel r_2$ (H2)
- $s \cap r_1 = \{P_1 | P_1 \text{ es único}\}$ (H3)

Demostrar que $s \cap r_2 = \{P_2 | P_2 \text{ es único}\}$ (C)



119

Demostración

1.	$s \cap r_2 \neq \{P_2 \mid P_2 \text{ es único}\}$	1.	$\sim C$
2.	$s \parallel r_2$	2.	Dos rectas son concurrentes o paralelas. No son concurrentes; entonces son paralelas.
3.	$r_1 \parallel r_2$	3.	H2
4.	$s \parallel r_1$	4.	(P3: 2, 3)
5.	$s \cap r_1 = \{P_1 \mid P_1 \text{ es único}\}$	5.	H3
6.	$(s \parallel r_1) \wedge (s \cap r_1 = \{P_1 \mid P_1 \text{ es único}\})$	6.	(conj. 4, 5)
7.	$(s \parallel r_1) \wedge (s \nparallel r_1)$ Contradicción de la forma $p \wedge \sim p$	7.	P6. Las expresiones $s \nparallel r_1$ y $s \cap r_1 = \{P_1 \mid P_1 \text{ es único}\}$ son equivalentes.
8.	$\sim (s \cap r_2 \neq \{P_2 \mid P_2 \text{ es único}\})$	8.	$\sim \sim C$
	$\vdash$		
9.	$s \cap r_2 = \{P_2 \mid P_2 \text{ es único}\}$	9.	C

LCDD.

120

Demostración alternativa

1. $s \cap r_2 \neq \{P_2 \mid P_2 \text{ es único}\}$	1. $\sim C$
2. $s \parallel r_2$	2. P6. Las expresiones $s \parallel r_2$ y $s \cap r_2 \neq \{P_2 \mid P_2 \text{ es único}\}$ son equivalentes.
3. $r_1 \parallel r_2$	3. H2
4. $(s \parallel r_2) \wedge (r_1 \parallel r_2)$	4. (conj. 2, 3)
5. $s \cap r_1 = \{P_1 \mid P_1 \text{ es único}\}$	5. H3
6. $\sim [(s \parallel r_2) \wedge (r_1 \parallel r_2)]$	6. A4
7. $[(s \parallel r_2) \wedge (r_1 \parallel r_2)] \wedge \sim [(s \parallel r_2) \wedge (r_1 \parallel r_2)]$	7. (conj. 4, 6)
8. $\sim (s \cap r_2 \neq \{P_2 \mid P_2 \text{ es único}\}$	8. $\sim \sim C$
$\vdash$	
9. $s \cap r_2 = \{\mathbf{P_2 \mid P_2 \text{ es único}}\}$	9. C

LCDD

121

4.4.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *demostrar*, de manera tentativa, el **Teorema 3:** por el método de reducción al absurdo:

  Si r_1 *y* r_2 *son rectas distintas en un plano y su intersección es no vacía,* entonces *se intersecan en un punto único.*

- *demostrar*, de manera tentativa, el **Teorema 4:** por el método de reducción al absurdo:

  Si r_1 *y* r_2 *son dos rectas paralelas y* s *una tercera recta que interseca a* r_1 *en un punto único,* entonces *interseca a* r_2 *en un punto único.*

4.5

Congruencia de ángulos correspondientes, alternos internos y alternos externos

122

Sean

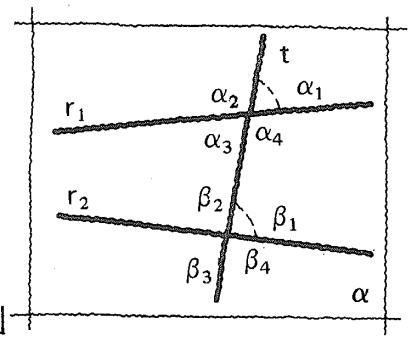
r_1 y r_2 dos rectas distintas contenidas en un plano; t, una transversal;

y

$<\alpha_1, <\alpha_2, <\alpha_3, <\alpha_4$

$<\beta_1, <\beta_2, <\beta_3$ y $<\beta_4$

los ángulos que se forman.



Recordemos que a un par de ángulos como $<\alpha_1$ y $<\beta_1$

les hemos llamado: [_____]

correspondientes

123

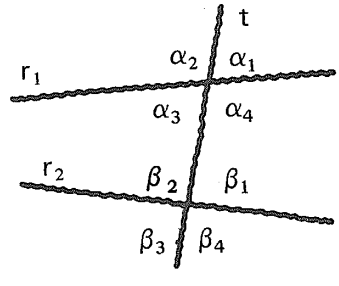
Otros tres pares de **ángulos correspondientes**

son:

[_____] y [_____],

[_____] y [_____],

[_____] y [_____].



$<\alpha_2$ $<\beta_2$

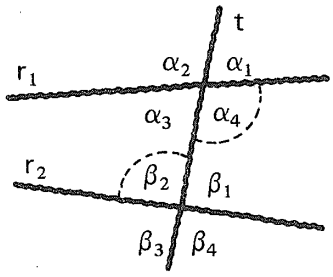
$<\alpha_3$ $<\beta_3$

$<\alpha_4$ $<\beta_4$

124

A un par de ángulos
como α_4 y β_2
los hemos denominado

└_____┘



alternos internos

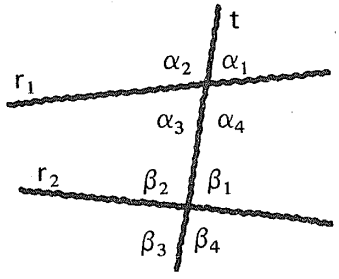
125

Los ángulos

└__┘ y └__┘

también son

alternos internos



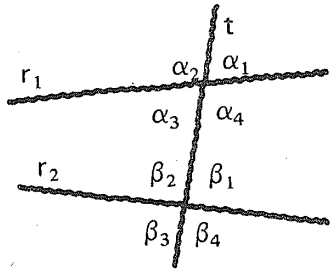
$<\alpha_3$ $<\beta_1$

126

Hemos designado con el nombre
de
ángulos **alternos externos**
a las siguientes parejas de ángulos:

└_____┘ y └_____┘,

└_____┘ y └_____┘.

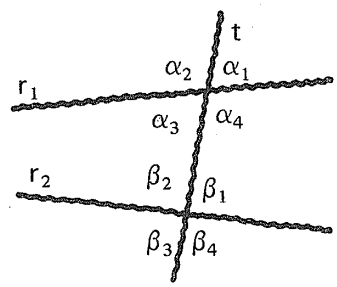


$<\alpha_1$ $<\beta_3$

$<\alpha_2$ $<\beta_4$

127

Además,
podemos señalar
los siguientes pares
de ángulos
opuestos por el vértice:



[ ] y [ ],

[ ] y [ ],

[ ] y [ ],

[ ] y [ ].

$<\alpha_1$ $<\alpha_3$

$<\alpha_2$ $<\alpha_4$

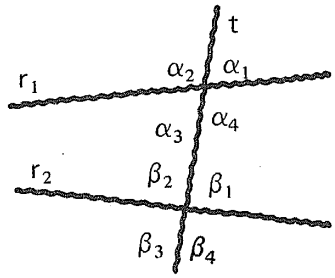
$<\beta_1$ $<\beta_3$

$<\beta_2$ $<\beta_4$

128

$<\alpha_1$ y $<\alpha_2$
$<\alpha_2$ y $<\alpha_3$
$<\alpha_3$ y $<\alpha_4$
$<\alpha_4$ y $<\alpha_1$

$<\beta_1$ y $<\beta_2$
$<\beta_2$ y $<\beta_3$
$<\beta_3$ y $<\beta_4$
$<\beta_4$ y $<\beta_1$



son pares de ángulos [ ]

adyacentes

129

Ahora bien,

nuestro **axioma A6**
afirma que:

Dos rectas intersecadas por una transversal
(o secante) son paralelas, si y sólo si
los ángulos correspondientes son congruentes.

130

Dos rectas intersecadas por una transversal son paralelas, si y sólo si *los ángulos correspondientes son congruentes.*

Este enunciado es equivalente a la conjunción de los dos enunciados condicionales:

[ ]

y

[ ]

- Si *dos rectas intersecadas por una transversal son paralelas,* entonces *los ángulos correspondientes son congruentes.*
- Si *los ángulos correspondientes determinados por dos rectas intersecadas por una transversal son congruentes,* entonces *las rectas son paralelas.*

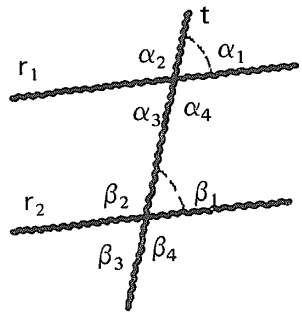
131

Una expresión simbólica, con referencia a la figura adjunta:

$r_1 \parallel r_2 \iff <\alpha_1 \cong <\beta_1$

que es equivalente a:

[ ] $\wedge$ [ ]



- $r_1 \parallel r_2 \Rightarrow <\alpha_1 \cong <\beta_1$
- $<\alpha_1 \cong <\beta_1 \Rightarrow r_1 \parallel r_2$

132

Entonces,

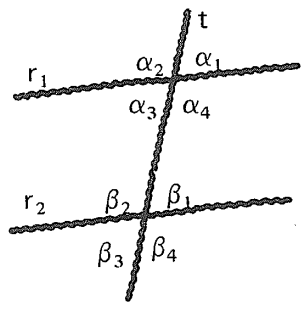
si sabemos que r_1 y r_2 son paralelas, debemos aceptar que:

[ ] $\cong$ [ ]

[ ] $\cong$ [ ]

[ ] $\cong$ [ ]

[ ] $\cong$ [ ]



$<\alpha_1$ $<\beta_1$

$<\alpha_2$ $<\beta_2$

$<\alpha_3$ $<\beta_3$

$<\alpha_4$ $<\beta_4$

133

Si sabemos que:

$\angle\alpha_1 \cong \angle\beta_1$

o

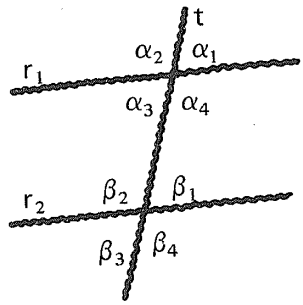
$\angle\alpha_2 \cong \angle\beta_2$

o

$\angle\alpha_3 \cong \angle\beta_3$

o

$\angle\alpha_4 \cong \angle\beta_4$



debemos aceptar que: ____

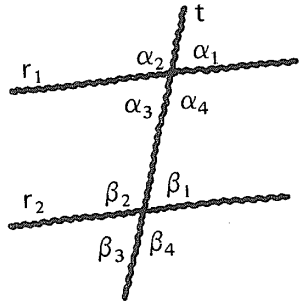
r_1 y r_2 son paralelas

($r_1 \parallel r_2$)

134

Observemos con cuidado la figura adjunta.

Si r_1 *y* r_2 *son paralelas* ¿podemos afirmar intuitivamente algo respecto de los **ángulos alternos internos?**



____

Parece razonable aceptar que los ángulos alternos internos son congruentes.

135

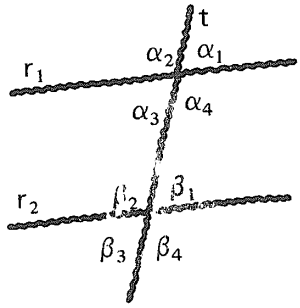
Conjeturamos que

si

____

entonces,

____



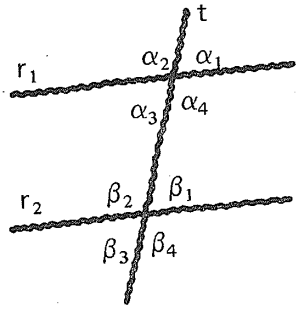
- *dos rectas intersecadas por una transversal son paralelas* ($r_1 \parallel r_2$)
- *los ángulos alternos internos son congruentes*

(por ejemplo: $\angle\alpha_3 \cong \angle\beta_1$)

136

Se requiere demostrar que:

Si r_1 *y* r_2 *son rectas paralelas intersecadas por una transversal,* entonces *los ángulos alternos internos son congruentes.*



Simbólicamente:

$r_1 \parallel r_2 \Rightarrow <\alpha_3 \cong <\beta_1$

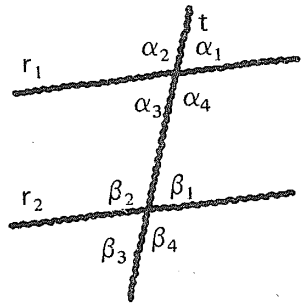
$\vee <\alpha_4 \cong <\beta_2$

137

Se requiere demostrar:

$r_1 \parallel r_2 \Rightarrow <\alpha_3 \cong <\beta_1$

Hipótesis: Sea(n):



Conclusión: Demostrar que:

Por ejemplo:

$r_1 \parallel r_2$ (H1)

t una transversal (H2)

$<\alpha_3 \cong <\beta_1$ (C)

138

Sean:

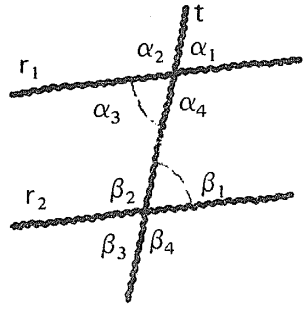
$r_1 \parallel r_2$ (H1)

y

t una transversal (H2)

Demostrar que:

$<\alpha_3 \cong <\beta_1$ (C)



Tracemos un plan para la demostración.

139

Demostración

Proposiciones:	Razones:
1. $<\alpha_1 \cong <\alpha_3$	1. [ ]

Teorema 1. Congruencia de ángulos opuestos por el vértice.

140

Proposiciones:	Razones:
1. $<\alpha_1 \cong <\alpha_3$	1. T1
2. $<\beta_1 \cong$ [ ]	2. T1

β_3

141

1. $<\alpha_1 \cong <\alpha_3$	1. T1
2. $<\beta_1 \cong <\beta_3$	2. T1
3. $<\alpha_1 \cong <\beta_1$	3. [ ]

Axioma 6.

Congruencia de ángulos correspondientes.

142

4. $<\alpha_3 \cong <\beta_1$ 4. ⌊———————⌋

P3. Transitividad de la relación de congruencia:

$<\alpha_1 \cong <\alpha_3$

$<\alpha_1 \cong <\beta_1$

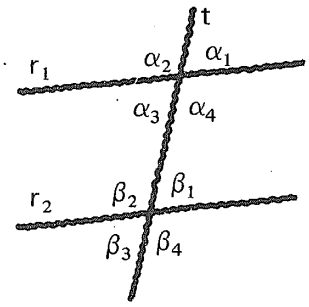
↓

$<\alpha_3 \cong <\beta_1$

143

Estudiar con atención este cuadro y el siguiente.

Si *dos rectas intersecadas por una transversal son paralelas,* entonces *los ángulos alternos internos son congruentes.*



Hipótesis ⌈ Sean: $r_1 \parallel r_2$ (H1)
t una transversal (H2)

Conclusión ⌈ Demostrar que: $<\alpha_3 \cong <\beta_1$ (C)

144

Demostración

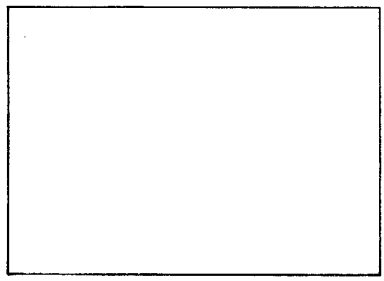
Proposiciones:	Razones:
1. $<\alpha_1 \cong <\alpha_3$	1. T1
2. $<\beta_1 \cong <\beta_3$	2. T1
3. $<\alpha_1 \cong <\beta_1$	3. A6
⊢	
4. $<\alpha_3 \cong <\beta_1$	4. P3

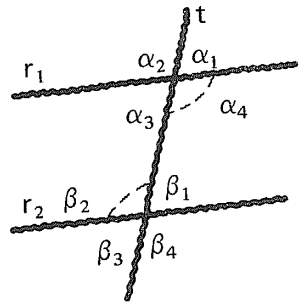
LCDD

145

En forma similar,
podemos demostrar que:

$r_1 \parallel r_2 \Rightarrow <\alpha_4 \cong <\beta_2$

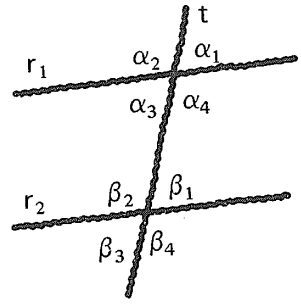




Respuesta
en el
cuadro siguiente

1. $<\alpha_2 \cong <\alpha_4$	1.	T1
2. $<\beta_2 \cong <\beta_4$	2.	T1
3. $<\alpha_2 \cong <\beta_2$	3.	A6
4. $<\alpha_4 \cong <\beta_2$	4.	P3

LCDD



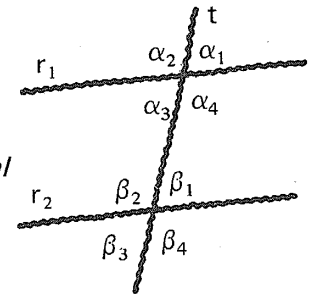
146

Ahora, investiguemos
si se cumple el recíproco
del **teorema 4.**

Teorema 4

Si r_1 *y* r_2 *son rectas paralelas intersecadas por una transversal* entonces *los ángulos alternos internos son congruentes.*

Su recíproco es:

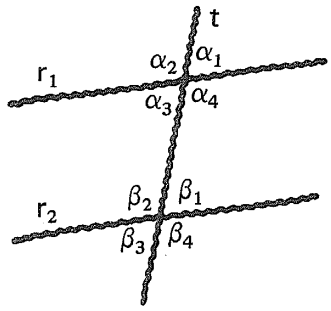


Por ejemplo:

Si *los ángulos alternos internos determinados por dos rectas paralelas intersecadas por una transversal son congruentes* entonces *las rectas son paralelas*

147

Una expresión simbólica del recíproco del teorema 4:



$<\alpha_3 \cong <\beta_1 \Rightarrow r_1 \parallel r_2$

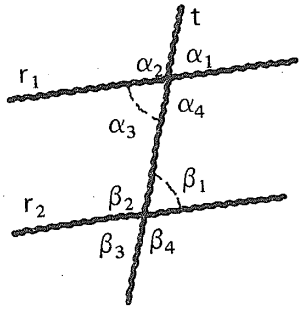
o bien

$<\alpha_4 \cong <\beta_2 \Rightarrow r_1 \parallel r_2$

148

Demostremos, entonces que:

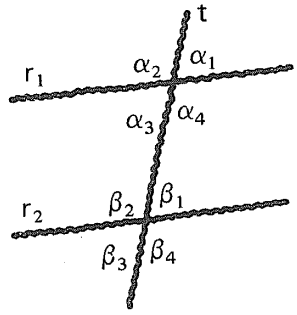
$<\alpha_3 \cong <\beta_1 \Rightarrow r_1 \parallel r_2$



Respuesta en el cuadro siguiente

1. $<\alpha_3 \cong <\beta_1$	1.	Hipótesis.
2. $<\alpha_3 \cong <\alpha_1$	2.	T1
3. $<\beta_1 \cong <\beta_3$	3.	T1
4. $<\alpha_3 \cong <\beta_3$	4.	(P3: 1, 3)
⊢		
5. $r_1 \parallel r_2$	5.	A6

LCDD

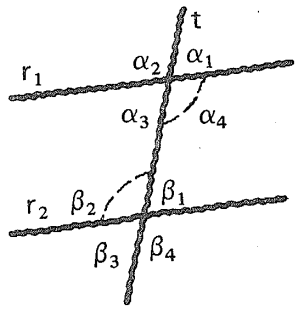


149

De manera similar,

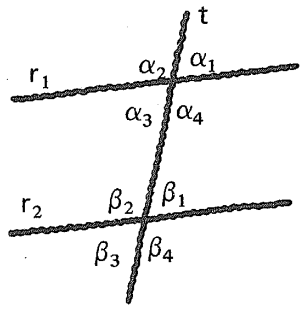
demostremos que:

$\angle\alpha_4 \cong \angle\beta_2 \Rightarrow r_1 \parallel r_2$



Respuesta
en el
cuadro siguiente

1.	$\angle\alpha_4 \cong \angle\beta_2$	1. Hipótesis
2.	$\angle\alpha_4 \cong \angle\alpha_2$	2. T1
3.	$\angle\beta_2 \cong \angle\beta_4$	3. T1
4.	$\angle\alpha_4 \cong \angle\beta_4$	4. (P3: 1,3)
5.	$r_1 \parallel r_2$	5. A6



LCDD

150

Entonces, dado que se cumplen:

la proposición — Si *dos rectas intersecadas por una transversal son paralelas,* entonces *los ángulos alternos internos son congruentes.*

y su recíproca — Si *los ángulos alternos internos determinados por dos rectas intersecadas por una transversal son congruentes,* entonces *las rectas son paralelas.*

Podemos enunciar el **Teorema 5** así:

Por ejemplo:

dos rectas intersecadas por una transversal son paralelas

si y sólo si

los ángulos alternos internos son congruentes

151

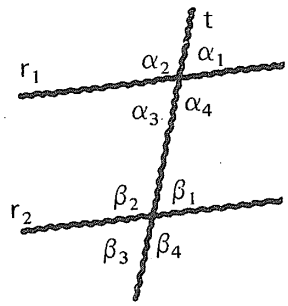
Teorema 5.

Dos rectas intersecadas por una transversal son paralelas

si y sólo si

los ángulos alternos internos son congruentes.

$r_1 \parallel r_2 \iff (\angle\alpha_3 \cong \angle\beta_1) \vee (\angle\alpha_4 \cong \angle\beta_2)$

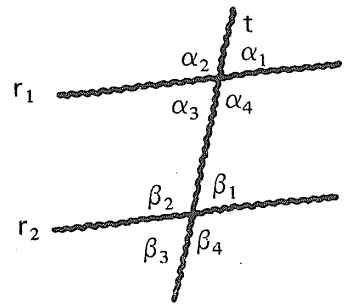


152

Ahora,

si $r_1 \parallel r_2$

¿qué podemos decir de los ángulos **alternos externos?**



Por ejemplo:

parece que son congruentes.

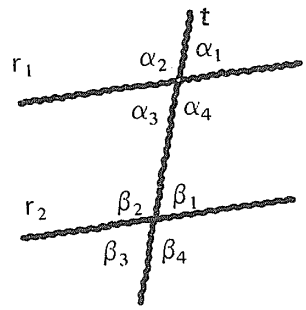
153

Intentemos demostrar que:

Dos rectas intersecadas por una transversal son paralelas

si y sólo si

los ángulos alternos externos son congruentes.



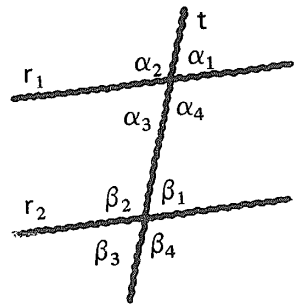
Comparar con la demostración de los cuadros siguientes.

154

Una demostración de: $r_1 \parallel r_2 \Rightarrow <\alpha_1 \cong <\beta_3$

1.	$<\alpha_1 \cong <\beta_1$	1. A6
2.	$<\beta_1 \cong <\beta_3$	2. T1
3.	$<\alpha_1 \cong <\beta_3$	3. (P3: 1, 2)

LCDD

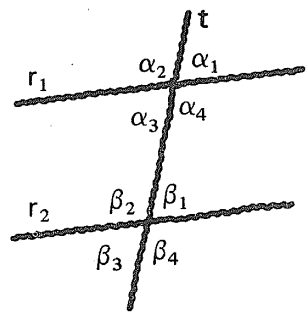


155

Una demostración de: $<\alpha_1 \cong <\beta_3 \Rightarrow r_1 \parallel r_2$

1.	$<\alpha_1 \cong <\beta_3$	1. Hipótesis
2.	$<\beta_3 \cong <\beta_1$	2. T1
3.	$<\alpha_1 \cong <\beta_1$	3. (P3: 1, 2)
4.	$r_1 \parallel r_2$	4. A6

LCDD



156

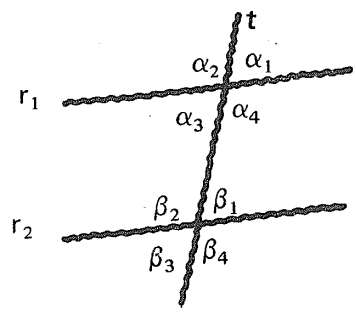
Teorema 6.

Dos rectas intersecadas por una transversal son paralelas

si y sólo si

los ángulos alternos externos son congruentes.

$r_1 \parallel r_2 \iff [(<\alpha_1 \cong <\beta_3) \vee (<\alpha_2 \cong <\beta_4)]$



157

En resumen,

si r_1 y r_2 son paralelas y t es una transversal;

los ángulos correspondientes son

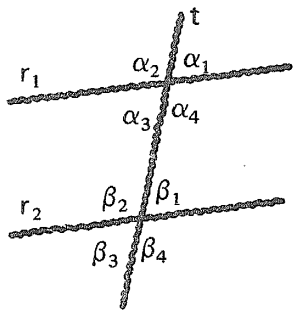
[ ] por [ ] ;

los ángulos alternos internos son

[ ] por [ ] ;

los ángulos alternos externos son

[ ] por [ ] .



congruentes A6

congruentes T5

congruentes T6

158

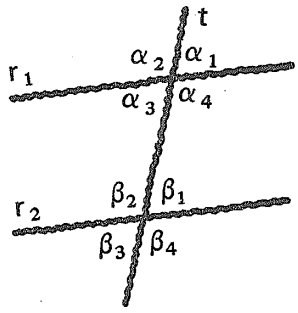
Además,
sabemos que

los ángulos opuestos por el vértice son

[ ] por [ ];

y que los ángulos adyacentes son

[ ]



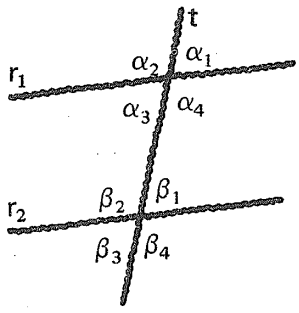
congruentes T1

suplementarios

159

Si $\measuredangle\alpha_1 = 30°$ y $r_1 \parallel r_2$, entonces:

$\measuredangle\alpha_2 =$ [ ]
$\measuredangle\alpha_3 =$ [ ]
$\measuredangle\alpha_4 =$ [ ]
$\measuredangle\beta_1 =$ [ ]
$\measuredangle\beta_2 =$ [ ]
$\measuredangle\beta_3 =$ [ ]
$\measuredangle\beta_4 =$ [ ]



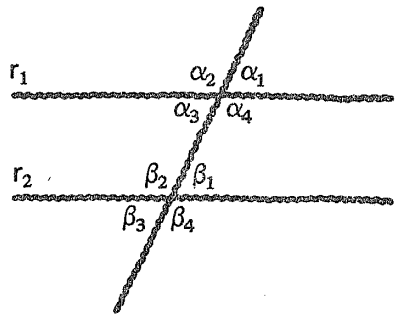
150°
30°
150°
30°
150°
30°
150°

160

Si $r_1 \parallel r_2$ y $\measuredangle \alpha_3 = 57°$

entonces:

$\measuredangle \beta_4 =$ ⌊____⌋.



123°

161

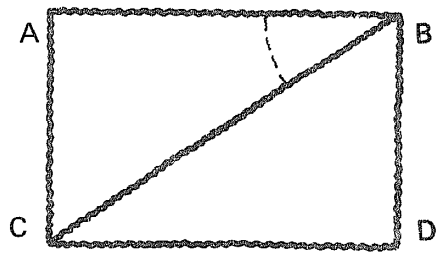
$\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{BD}$

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

$\measuredangle ABC = 34° 27'$

$\measuredangle BCD =$ ⌊____⌋

porque ⌊____⌋



34° 27

son ángulos alternos internos formados por dos paralelas.

162

Si $\begin{cases} \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \\ \overleftrightarrow{CA} \parallel \overleftrightarrow{DB} \end{cases}$

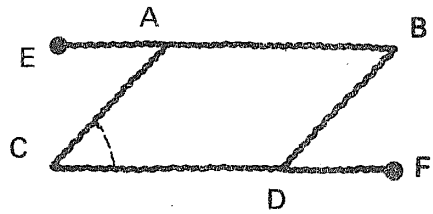
$\measuredangle ACD = 47° 13'$

$\measuredangle EAC =$ ⌊____⌋

$\measuredangle ABD =$ ⌊____⌋

$\measuredangle BDF =$ ⌊____⌋

$\measuredangle CAB =$ ⌊____⌋



47° 13'

47° 13'

47° 13'

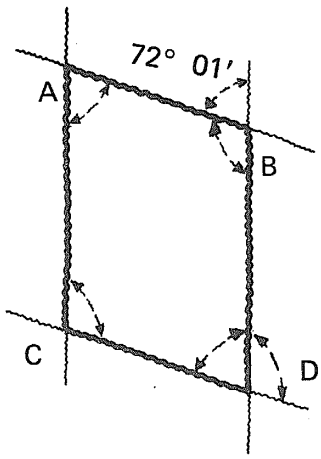
132° 47'

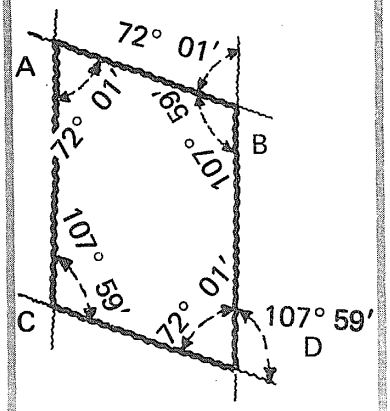
163

$\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{BD}$

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

Indicar las medidas de los ángulos señalados.





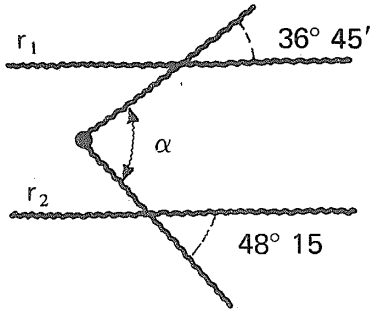
16

Si

$r_1 \parallel r_2$

entonces

$\measuredangle\alpha =$ ⌊_____⌋



Respuesta en el cuadro siguiente

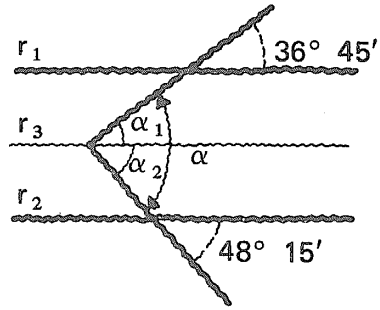
Trazamos $r_3 \parallel r_1$
y como $r_1 \parallel r_2$
por P3: $r_3 \parallel r_2$

$\measuredangle\alpha_1 = 36°\ 45'$ (A6)

$\measuredangle\alpha_2 = 48°\ 15'$ (A6)

$\measuredangle\alpha = \measuredangle\alpha_1 + \measuredangle\alpha_2 = 36°\ 45' + 48°\ 15'$

$\measuredangle\alpha = 85°$



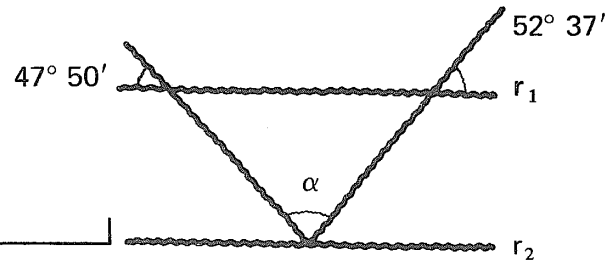
165

Si

$r_1 \parallel r_2$

entonces

$\measuredangle\alpha =$ _____



Respuesta en el cuadro siguiente

Trazamos $r_3 \perp r_2$

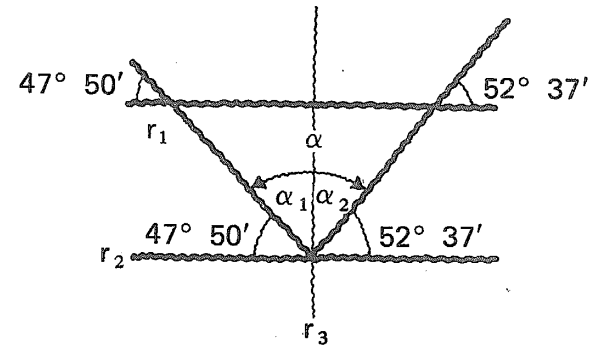
$\measuredangle\alpha_1 = 90° - 47° 50' = 42° 10'$

$\measuredangle\alpha_2 = 90° - 52° 37' = 37° 23'$

$\measuredangle\alpha_2 = \measuredangle\alpha_1 + \measuredangle\alpha_2$

$\measuredangle\alpha = 42° 10' + 37° 23'$

$\measuredangle\alpha = 79° 33'$



166

Si

$r_1 \parallel r_2 \wedge r_3 \parallel r_4$

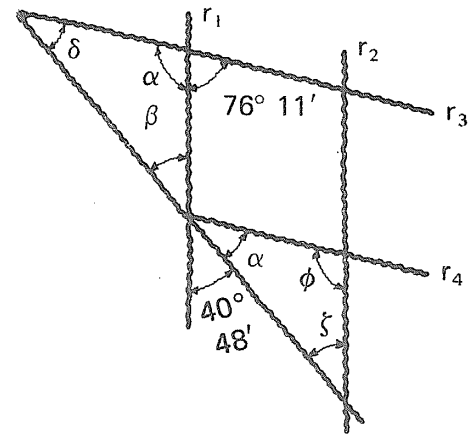
$\measuredangle\alpha =$ _____

$\measuredangle\beta =$ _____

$\measuredangle\delta =$ _____

$\measuredangle\phi =$ _____

$\measuredangle\zeta =$ _____



35° 23′

40° 48′

35° 23′

103° 49′

40° 48′

4.4.5.1

Práctica adicional,
si se
considera necesario.

4.4.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *demostrar* los **teoremas T4 y T5** relacionados con la congruencia de ángulos alternos internos o alternos externos determinados por dos rectas intersecadas por una transversal;

- *aplicar* los principios de congruencia de ángulos opuestos por el vértice, correspondientes, alternos internos y alternos externos, así como la suplementaridad de ángulos adyacentes, a la determinación de la medida de ángulos formados por rectas paralelas y transversales.

4.6

Perpendicularidad y paralelismo

167

En el plano α,

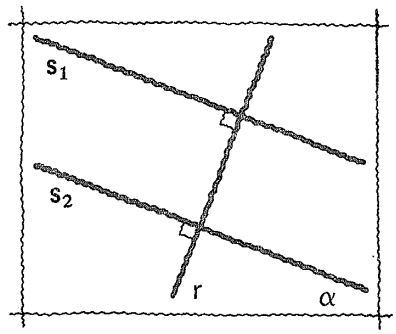
consideremos una recta r

y otras dos rectas (s_1 y s_2),

tales que:

$s_1 \perp r \wedge s_2 \perp r$.

¿Percibimos alguna relación entre s_1 y s_2?



Una posible respuesta:

"parece que son paralelas".

168

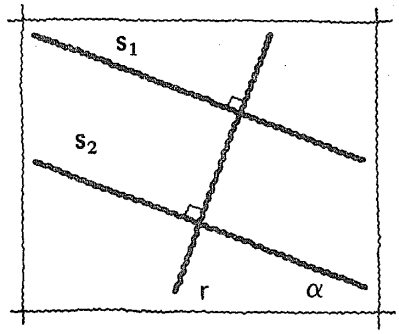
Conjeturamos que:

en el plano α,

si $s_1 \perp r \wedge s_2 \perp r$

entonces $s_1 \parallel s_2$

lo cual necesitamos demostrar enseguida.

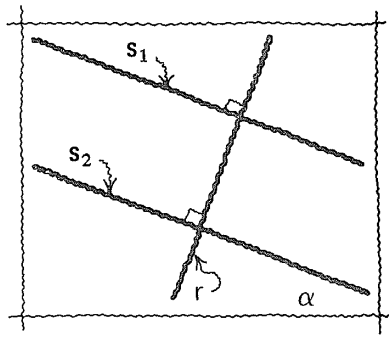


169

Escribir las expresiones simbólicas:

Hipótesis

Sea(n):



Tesis o Conclusión

Demostrar que:

$s_1 \subset \alpha$ (H1)
$s_2 \subset \alpha$ (H2)
$r \subset \alpha$ (H3)
$s_1 \perp r$ (H4)
$s_2 \perp r$ (H5)

$s_1 \parallel s_2$ (C)

170

Sean

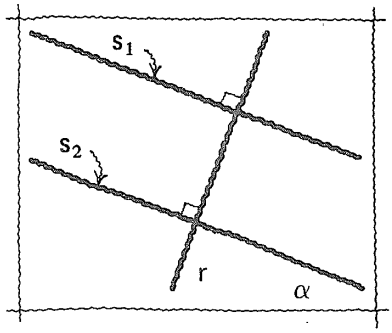
$s_1 \subset \alpha$ (H1)

$s_2 \subset \alpha$ (H2)

$r \subset \alpha$ (H3)

$s_1 \perp r$ (H4)

$s_2 \perp r$ (H5)



Demostrar que: $s_1 \parallel s_2$ (C)

Determinar un plan de acción para la demostración.

171

Demostrar que:

$s_1 \parallel s_2$

Veamos como puede funcionar el método de reducción al absurdo en este caso.

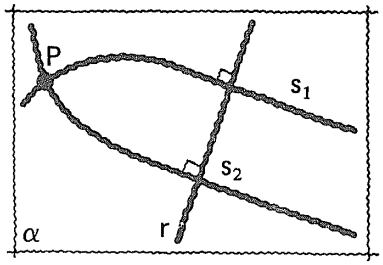
Empecemos por negar la conclusión.

1. [ ] 1. [ ]

$\nparallel s_2$ $\sim$ C

172

Entonces, es posible una situación como la que se muestra en la siguiente ilustración.



Sabemos que dos rectas en un plano:

- no se intersecan
- son iguales,

} son paralelas,

- se intersecan en un punto único (T3): son concurrentes.

Como estamos negando que son paralelas, entonces, deben intersecarse en un punto único P.

2. [ ].

$P \in s_1 \wedge P \in s_2$

173

Demostrar que: $s_1 \parallel s_2$

1. $s_1 \nparallel s_2$	1. $\sim C$
2. $s_1 \cap s_2 = \{P \mid P \text{ es único}\}$	2. De 1
3. $P \in s_1 \wedge P \in s_2$	3. [ ]

Definición de intersección
$s_1 \cap s_2$
$= \{P \mid P \in s_1 \wedge P \in s_2\}$

174

1. $s_1 \nparallel s_2$	1. $\sim C$
2. $s_1 \cap s_2 = \{P \mid P \text{ es único}\}$	2. De 1
3. $P \in s_1 \wedge P \in s_2$	3. Definición de intersección.

Pero, P no puede pertenecer a s_1 y a s_2 siendo s_1 y s_2 perpendiculares a r (H4, H5)

Razón:

[ ]

Axioma A5:

Si r *es una recta y* P *un punto, ambos contenidos en un mismo plano,* entonces *existe una perpendicular a* r, *que contiene a* P, *y sólo una.*

175

1.	$s_1 \nparallel s_2$	1.	$\sim C$
2.	$s_1 \cap s_2 = \{P \mid P \text{ es único}\}$	2.	De 1
3.	$P \in s_1 \wedge P \in s_2$	3.	Definición de intersección
4.	$\sim (P \in s_1 \wedge P \in s_2)$	4.	Axioma A5
5.	$(P \in s_1 \wedge P \in s_2) \wedge \sim (P \in s_1 \wedge P \in s_2)$ Contradicción: $R \wedge \sim R$	5.	Conjunción de 3 y 4
Por lo tanto:			
6.	$\sim s_1 \nparallel s_2$	6.	$\sim \sim C$
$\vdash$		7.	$\sim \sim C \equiv C$
7.	$s_1 \parallel s_2$ LCDD		

176

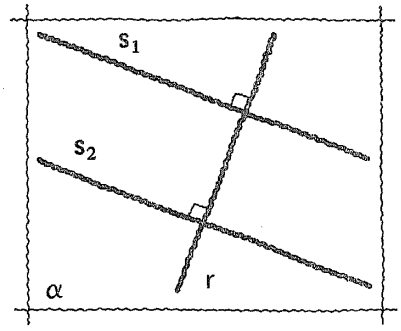
Estudiar con atención este cuadro y el siguiente.

Teorema 7.

En un plano, si *dos rectas son perpendiculares a una tercera,* entonces *son paralelas entre sí.*

Sean $s_1 \subset \alpha \wedge s_2 \subset \alpha \wedge r \subset \alpha \wedge s_1 \perp r \wedge s_2 \perp r$

Demostrar que: $s_1 \parallel s_2$ C



177

Demostración

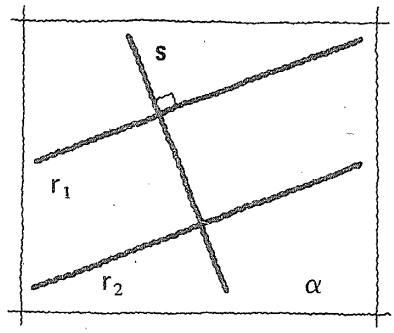
Proposiciones:		Razones:	
1.	$s_1 \nparallel s_2$	1.	$\sim C$
2.	$s_1 \cap s_2 = \{P \mid P \text{ es único}\}$	2.	Inferido de 1
3.	$P \in s_1 \wedge P \in s_2$	3.	Definición de intersección
4.	$\sim (P \in s_1 \wedge P \in s_2)$	4.	Axioma A5
5.	$(P \in s_1 \wedge P \in s_2) \wedge \sim (P \in s_1 \wedge P \in s_2)$	5.	Conjunción de 3 y 4
6.	$\sim s_1 \nparallel s_2$	6.	$\sim \sim C$
$\vdash$			
7.	$s_1 \parallel s_2$ LCDD	7.	$\sim \sim C \equiv C$

178

Demostremos, ahora,
esta otra proposición.

Teorema 8.

En un plano, si *una recta* (s) *es perpendicular a una de dos rectas paralelas* (r_1), entonces *es perpendicular a la otra* (r_2).



Ver cuadro siguiente

179

Hipótesis

Sea(n):

Tesis o Conclusión

Demostrar que:

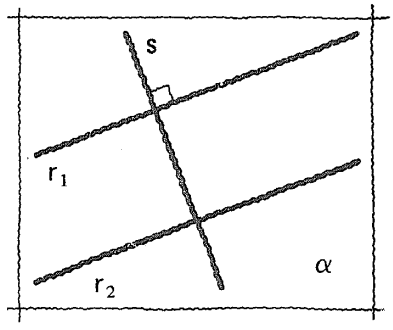
$r_1 \subset \alpha$ (H1)
$r_2 \subset \alpha$ (H2)
$s \subset \alpha$ (H3)
$r_1 \parallel r_2$ (H4)
$s \perp r_1$ (H5)

$s \perp r_2$ (C)

180

Sea:
- $r_1 \subset \alpha$ (H1)
- $r_2 \subset \alpha$ (H2)
- $s \subset \alpha$ (H3)
- $r_1 \parallel r_2$ (H4)
- $s \perp r_1$ (H5)

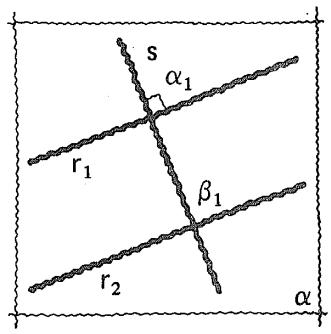
Demostrar que: $s \perp r_2$ (C)



Intentar la demostración y compararla con la del cuadro siguiente.

181

1. s y r_1 son concurrentes.	1. Definición de perpendicularidad.
2. s y r_2 son concurrentes.	2. Teorema 4.
3. s es una transversal.	3. Definición de transversal.
4. $\angle\alpha_1$ y $\angle\beta_1$ son correspondientes.	4. Definición.
5. $\angle\alpha_1 \cong \angle\beta_1$	5. Axioma A6.
6. $\angle\alpha_1$ es recto.	6. Definición de perpendicularidad.
7. $\angle\beta_1$ es recto	7. Supuesto: dos ángulos rectos son congruentes.
$\vdash$	
8. $s \perp r_2$	8. Definición de perpendicularidad.

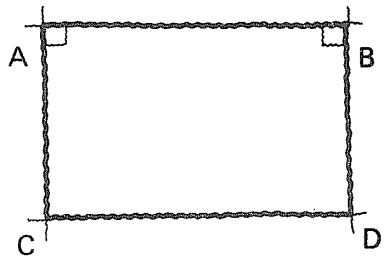


LCDD

182

- $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{AB}$
- $\overleftrightarrow{DB} \perp \overleftrightarrow{AB}$

entonces, por teorema 7:

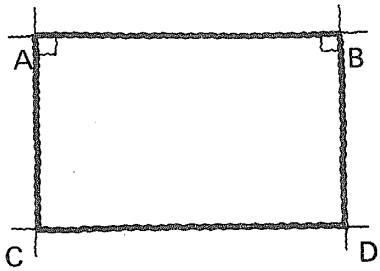


$\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{DB}$

183

- $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{BD}$
- $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AC}$

entonces, por teorema 8:



$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BD}$

4.4.6.1

Práctica adicional,
si se considera
necesario.

4.4.6

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *demostrar,* de manera tentativa, el **Teorema 7:**

  En un plano, si *dos rectas son perpendiculares a una tercera,* entonces *son paralelas entre sí.*

  por el método de reducción al absurdo;

- *demostrar,* de manera tentativa, el **Teorema 8:**

  En un plano, si *una recta es perpendicular a una de dos rectas paralelas* entonces *es perpendicular a la otra.*

Esta obra se terminó de imprimir
el día 10 de mayo de 1984,
en los talleres de Impresora Lorenzana, S. A.,
Cafetal núm. 661, Col. Granjas México,
se encuadernó en Servicios Editoriales Profesionales, S. A.,
Av. 5 de Mayo núm. 495, Col. Merced Gómez,
Deleg. Álvaro Obregón, 01600, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO EV KC 100